technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller

Dortmund, den 3. 6. 2008

Numerische Integration

9. Übung

Aufgabe 30 (1 + 2 + 2 Punkte)

Sei $E : C[a,b] \to \mathbb{R}$ ein Quadraturfehler und $E^{(M)}$ der Fehler der M-fach iterierten (zu E gehörenden) Quadraturformel.

a) Zeigen Sie $\|E^{(M)}\| = \|E\|$.

b) Beweisen Sie, dass die Folge $\{E^{(M)}\}_{M=1}^{\infty}$ schwach-$*$ gegen 0 konvergiert.

c) Beweisen Sie, dass die Folge $\{E^{(M)}\}_{M=1}^{\infty}$ nicht stark gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 31 (3 + 1 + 1 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $n = 3$ die Knoten und Gewichte der Gauß'schen Quadraturformel für das Integral

$$I : f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx.$$

b) Transformieren Sie diese Formel auf das Intervall $[0, 1]$.

c) Berechnen Sie mit dieser Formel einen Näherungswert an das Integral

$$A := \int_{0}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Aufgabe 32 (2 + 4 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die zweipunktige Gauß-Legendre Quadratursumme

$$Q_2(f) = f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

a) Sei $\Omega_2(x) := x^2 - \frac{1}{3}$. Bestimmen Sie ein Polynom $\omega_3 \in \mathcal{P}_3 \setminus \{0\}$ mit

$$\int_{-1}^{1} \Omega_2(x)\omega_3(x)x^k dx = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2.$$

b) Bestimmen Sie zu den Nullstellen von $\Omega_2 \cdot \omega_3$ eine interpolatorische Quadraturformel.

c) Zeigen Sie, dass diese Quadraturformel exakt ist für alle Polynome aus $\mathcal{P}_7$.

d) Transformieren Sie die zweipunktige Gauß-Legendre-Formel und die Formel aus c) auf das Intervall $[0, 1]$ und berechnen Sie damit Näherungen an das Integral A aus Aufgabe 31 c).

Aufgabe 33* (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C[0, 1]$ mit

$$f_1(x) := \sqrt{x^5}, \quad f_2(x) := \frac{1 - \cos(x)}{x}, \quad f_3(x) := x^2 \cdot (2 \log(x) - 1).$$

Ziehen Sie mit Hilfe der iterierten Trapezregel $Q_T^{(M)}(f) := \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M}{}'' f(\frac{k}{M})$ Rückschlüsse auf die Differenzierbarkeitsordnungen von f_1, f_2, f_3, indem Sie zunächst

$$\Delta_M(f_i) := \frac{Q_T^{(2M)}(f_i) - Q_T^{(M)}(f_i)}{Q_T^{(4M)}(f_i) - Q_T^{(2M)}(f_i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

für einige Werte von M berechnen.

Abgabe: Dienstag, 10.06., 16.00 Uhr im Briefkasten 48 (Aufgaben30 – 32)
Dienstag, 17.06., 16.00 Uhr (Aufgabe 33*)