

Numerische Integration

8. Übung MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 27

Die Formel von Euler-Maclaurin lautet für $h = \frac{1}{10}$ und $s = 2$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - R_{10} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{10+k} - \frac{1}{12} 10^{-2} \{f'(1) - f'(0)\} + \frac{1}{720} 10^{-4} \{f'''(1) - f'''(0)\}. \end{aligned}$$

Mit

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{-6}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^4}$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - R_{10} &= \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{10+k} - \frac{1}{1200} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{7200000} \left(6 - \frac{6}{16}\right) \\ &\approx 0,693771403 - 0,000625 + 0,000000781 \\ &= 0,693147184. \end{aligned}$$

Zum Vergleich

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log(2) = 0,6931471805599\dots$$

Wegen $|\tilde{B}_4(t)| \leq \max\{|B_4(0)|, |B_4(\frac{1}{2})|\} = \frac{1}{720}$ und

$$\int_0^1 |f^{(4)}(t)| dt = \int_0^1 f^{(4)}(t) dt = \frac{-6}{(1+t)^4} \Big|_0^1 = 6 - \frac{6}{16} = \frac{45}{8}$$

erhält man die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |R_{10}| &= 10^{-4} \left| \int_0^1 f^{(4)}(t) \tilde{B}_4(10t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{720} 10^{-4} \int_0^1 |f^{(4)}(t)| dt = \frac{1}{720} 10^{-4} \frac{45}{8} \approx 0,00000078121. \end{aligned}$$

Aufgabe 28

a) Wer viel Lust auf Rechnen und weniger auf Nachdenken hat, schätzt wie folgt ab:

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{k^2} \quad \forall k \geq n+1$$

und erhält

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

Falls man doch noch etwas nachdenkt, kommt man auf

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right). \quad (2)$$

Cleverer ist es, erst nachzudenken und eine Partialbruchentwicklung zu verwenden

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3 - k} = \frac{\frac{1}{2}}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{2}}{k+1}.$$

Dann bekommt man nämlich

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - k} \quad (3)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \right) \quad (4)$$

$$+ \left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{\frac{1}{2}}{n+3} \right) \quad (5)$$

$$+ \left(\frac{\frac{1}{2}}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{\frac{1}{2}}{n+4} \right) \quad (6)$$

$$+ \dots \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}. \quad (8)$$

Abschätzung (1) gibt 328 986 als kleinstes n , denn

$$n \geq 328\,986 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{1}{2} 10^{-5}.$$

Abschätzung (2) gibt (nach Ausrechnen vieler Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$) 447 als kleinstes n wegen

$$n \geq 447 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \leq \frac{1}{2} 10^{-5}.$$

Abschätzungen (3)-(8) geben 316 als kleinstes n , denn

$$n \geq 316 \Leftrightarrow \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2}10^{-5}.$$

Jetzt gibt die (immer noch mühsame) Rechnung

$$S_{316} := \sum_{k=1}^{316} \frac{1}{k^3} = 0,2020519\dots$$

als Näherung an $S_{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mit

$$0 \leq S_{\infty} - S_{316} \leq \frac{1}{2}10^{-5}.$$

b) Wegen $B'_2(t) = B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ und $B_2(0) = B_2(1)$ gilt

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |B_2(t)| = \max\{|B_2(0)|, |B_2(\frac{1}{2})|\} = \max\{\frac{1}{12}, \frac{1}{24}\} = \frac{1}{12}.$$

Analog wegen $B'_4(t) = B_3(t) = \frac{1}{6}t(t-1)(t-\frac{1}{2})$ und $B_4(0) = B_4(1)$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |B_4(t)| = \max\{|B_4(0)|, |B_4(\frac{1}{2})|\} = \max\{\frac{1}{720}, \frac{7}{5760}\} = \frac{1}{720}.$$

c) Mit etwas Rechnung bekommt man mit $f''(t) = \frac{12}{t^5}$

$$\begin{aligned} \int_1^5 f''(t)B_2(t - [t])dt &= \int_1^2 f''(t)B_2(t-1)dt = \frac{3}{64} \\ &+ \int_2^3 f''(t)B_2(t-2)dt = \frac{5}{5184} \\ &+ \int_3^4 f''(t)B_2(t-3)dt = \frac{7}{82944} \\ &+ \int_4^5 f''(t)B_2(t-4)dt = \frac{9}{64000} \end{aligned}$$

Zusammen also

$$\int_1^5 f''(t)\tilde{B}_2(t)dt = \frac{3}{64} + \frac{5}{5184} + \frac{7}{82944} + \frac{9}{64000} = \frac{51773}{108000} \approx 0,4793796296.$$

Entsprechend bekommt man mit $f^{(4)}(t) = \frac{360}{t^7}$

$$\begin{aligned} \int_1^5 f^{(4)}(t)B_4(t - [t])dt &= \int_1^2 f^{(4)}(t)B_4(t-1)dt = \frac{-9}{256} \\ &+ \int_2^3 f^{(4)}(t)B_4(t-2)dt = \frac{-125}{559872} \\ &+ \int_3^4 f^{(4)}(t)B_4(t-3)dt = \frac{-343}{35831808} \\ &+ \int_4^5 f^{(4)}(t)B_4(t-4)dt = \frac{-243}{256000000} \end{aligned}$$

Zusammen also

$$\int_1^5 f^{(4)}(t)\tilde{B}_4(t)dt = \frac{-9}{256} + \frac{-125}{559872} + \frac{-343}{35831808} + \frac{-243}{256000000} \approx -0,353900370.$$

d) Mit den Abschätzungen aus Teil b) bekommt man

$$\begin{aligned} \left| \int_5^\infty f''(t)\tilde{B}_2(t)dt \right| &\leq \int_5^\infty \frac{12}{t^5} \frac{1}{12} dt = \frac{-1}{4t^4} \Big|_5^\infty = \frac{1}{1300}, \\ \left| \int_5^\infty f^{(4)}(t)\tilde{B}_4(t)dt \right| &\leq \int_5^\infty \frac{360}{t^7} \frac{1}{720} dt = \frac{-1}{12t^6} \Big|_5^\infty = \frac{1}{37500}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst für $s = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} &= \frac{1}{2} + \int_1^\infty \frac{1}{t^3} dt + \frac{1}{12} \cdot 3 - \int_1^\infty \frac{12}{t^5} \tilde{B}_2(t) dt \\ &= \frac{5}{4} - \int_1^\infty \frac{12}{t^5} \tilde{B}_2(t) dt \end{aligned}$$

mit

$$\int_0^5 \frac{12}{t^5} \tilde{B}_2(t) dt = 0,04793796296\dots$$

und

$$\varepsilon_2 := - \int_5^\infty \frac{12}{t^5} \tilde{B}_2(t) dt.$$

Also

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} = \frac{5}{4} - 0,04793796296\dots + \varepsilon_2 \approx 1,202062037 + \varepsilon_2$$

mit $|\varepsilon_2| \leq -0,00076923\dots$

Zusammengefasst für $s = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} &= \frac{1}{2} + \int_1^\infty \frac{1}{t^3} dt + \frac{1}{12} \cdot 3 - \frac{60}{720} - \int_1^\infty \frac{360}{t^7} \tilde{B}_4(t) dt \\ &= \frac{7}{6} - \int_1^\infty \frac{360}{t^7} \tilde{B}_4(t) dt \end{aligned}$$

mit

$$\int_0^5 \frac{360}{t^7} \tilde{B}_4(t) dt = -0,3539003704\dots$$

und

$$\varepsilon_4 := - \int_5^\infty \frac{360}{t^7} \tilde{B}_4(t) dt.$$

Also

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} = \frac{7}{6} + 0,3539003704\dots + \varepsilon_4 \approx 1,202056704 - \varepsilon_4$$

mit $|\varepsilon_4| \leq 0,000026\bar{6}$.

Aufgabe 29

Vorbetrachtung:

Die m -fach iterierte Trapezregel für das Integral

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

lautet mit $h := \frac{b-a}{m}$

$$I(f) = h \sum_{k=0}^m {}'' f(a + k \cdot h) + E_T^{(m)}(f).$$

Wählt man für m nur Zweierpotenzen, $m = 2^s$, dann sind die Quadratursummen die Werte $T_s^{(0)}$ des Rombergschemas,

$$T_s^{(0)} = h \sum_{k=0}^m {}'' f(a + k \cdot h), \quad s \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $2^{s+1} = 2m$ und $\frac{b-a}{2m} = \frac{h}{2}$ enthält zweite Spalte des Rombergschemas die Werte

$$\begin{aligned} T_s^{(1)} &:= \frac{1}{3} \left(4T_{s+1}^{(0)} - T_s^{(0)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(4 \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{2m} {}'' f(a + k \cdot \frac{h}{2}) - h \sum_{k=0}^m {}'' f(a + k \cdot h) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(2h \sum_{k=0}^{2m} {}'' f(a + k \cdot \frac{h}{2}) - h \sum_{k=0}^m {}'' f(a + 2k \cdot \frac{h}{2}) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(\sum_{k=0}^m {}'' f(a + 2k \cdot \frac{h}{2}) + 2 \sum_{k=1}^m f(a + (2k-1) \cdot \frac{h}{2}) \right) \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Quadratursumme der m -fach iterierten Simpsonregel

$$\begin{aligned} Q_S^{(m)} &:= \frac{h}{6} \left(\sum_{k=1}^m (f(a + (k-1)h) + 4 \cdot f(a + (k-\frac{1}{2})h) + f(a + k \cdot h)) \right) \\ &= \frac{h}{6} \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^m f(a + (2k-1)\frac{h}{2}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(a + 2k\frac{h}{2}) + f(b) \right) \end{aligned}$$

zeigt $T_s^{(1)} = Q_S^{(m)}$ für $m = 2^s$.

Nach dieser Vorbetrachtung jetzt zur Lösung der Aufgabe.

Behauptung. $T_0^{(r)}$ ist die Quadratursumme einer Quadraturformel mit den Knoten $a + k \cdot h_r$, $k = 0, 1, \dots, 2^r$, wobei $h_r = 2^{-r}(b-a)$. Diese Formel ist exakt für alle Polynome vom Grad $2r-1$. $T_i^{(r)}$ ist die Quadratursumme der zugehörigen 2^i -fach iterierten Formel.

Beweis. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$T_i^{(k)} = \frac{1}{4^k - 1} \left(4^k T_{i+1}^{(k-1)} - T_i^{(k-1)} \right) \quad (9)$$

kann man $T_0^{(r)}$ durch $T_0^{(r-1)}$ und $T_1^{(r-1)}$ ausdrücken, diese wiederum durch $T_0^{(r-2)}$, $T_1^{(r-2)}$ und $T_2^{(r-2)}$ usw. Mit vollständiger Induktion zeigt man daher leicht, dass $T_0^{(r)}$ eine Linearkombination von $T_0^{(0)}$, $T_1^{(0)}$, \dots , $T_r^{(0)}$ ist. Weil die Knotenmengen der beteiligten iterierten Trapezsummen ineinander enthalten sind, also Teilmengen von der Knotenmenge $\{a + k \cdot h_r \mid k = 0, 1, \dots, 2^r\}$ sind, erhält man

$$T_0^{(r)} = \sum_{k=0}^{2^r} a_k f(a + k \cdot h_r).$$

mit gewissen Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$.

Man bekommt die $2m$ -fach iterierte Quadratursumme $Q^{(2m)}(f)$ aus der m -fach iterierten

$$Q^{(m)}(f) := \sum_{i=0}^N b_i f(a + i \cdot h)$$

indem man die m -fach iterierte Formel auf $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ transformiert und die beiden Quadratursummen addiert,

$$Q^{(2m)}(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N b_i f(a + i \cdot \frac{h}{2}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N b_i f(\frac{a+b}{2} + i \cdot \frac{h}{2}).$$

Startet man das Romberg-Verfahren für das Integral $\int_a^{(a+b)/2} f(x) dx$ so bekommen wir Näherungen, die wir wegen der möglichen Verwechslung mit $L_i^{(k)}$ statt $T_i^{(k)}$ bezeichnen, und für das Integral $\int_{(a+b)/2}^b f(x) dx$ gibt Romberg Näherungen, die wir $R_i^{(k)}$ nennen. Es gilt dann für die erste Rombergspalte

$$T_{i+1}^{(0)} = L_i^{(0)} + R_i^{(0)}, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

weil hier $T_{i+1}^{(0)}$ die $2m$ -fach und $T_i^{(0)}$ die m -fach iterierte Trapezsumme ist mit $m = 2^i$.

Nehmen wir jetzt induktiv an, dass wir schon

$$T_{i+1}^{(k)} = L_i^{(k)} + R_i^{(k)}, \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0,$$

für ein festes $k \geq 0$ gezeigt haben, dann folgt mit der Rekursion (9)

$$T_{i+1}^{(k+1)} = \frac{1}{4^{k+1} - 1} \left(4^{k+1} T_{i+2}^{(k)} - T_{i+1}^{(k)} \right)$$

Die Induktionsannahme eingesetzt, gibt

$$T_{i+1}^{(k+1)} = \frac{1}{4^{k+1} - 1} \left(4^{k+1} L_{i+1}^{(k)} - L_i^{(k)} \right) + \frac{1}{4^{k+1} - 1} \left(4^{k+1} R_{i+1}^{(k)} - R_i^{(k)} \right).$$

Weil (9) auch für die $L_i^{(k)}$ und die $R_i^{(k)}$ gilt, vereinfacht sich die eben erhaltene Gleichung zu

$$T_{i+1}^{(k+1)} = L_i^{(k+1)} + R_i^{(k+1)},$$

womit der Induktionsbeweis beendet ist. $T_i^{(k)}$ ist also die Quadratursumme der 2^i -fach iterierten Formel mit Quadratursumme $T_0^{(k)}$.

Die Herleitung der Rekursionsgleichung (9) zeigt, dass der Fehler

$$\int_a^b f(x)dx - T_i^{(k)} = \tilde{c}_{2k}h^{2k} + \mathcal{O}(h^{2k+2})$$

ist. Wenn man die Fehlerdarstellung für iterierte Formeln hiermit vergleicht, liest man ab, dass die Formeln der k -ten Spalte mindestens den Exaktheitsgrad $2k - 1$ haben. □