

Numerische Integration

8. Übung

Aufgabe 27 (5 Punkte)
Bestimmen Sie mit der Formel von Euler-Maclaurin eine Näherung an

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2).$$

Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{10}$ und $s = 2$ und schätzen Sie den Fehler ohne Verwendung des exakten Werts $\ln(2)$ ab.

Aufgabe 28 (2 + 2 + 4 + 2 Punkte)
Der Reihenwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ soll auf vier Nachkommastellen berechnet werden.
a) Bestimmen Sie dazu ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$$

und berechnen Sie die Summe $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.

b) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} |B_2(t)| &\leq \frac{1}{6} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ |B_4(t)| &\leq \frac{1}{30} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie für $n = 5$ die Integrale $\int_1^n f''(t) \tilde{B}_2(t) dt$ und $\int_1^n f^{(iv)}(t) \tilde{B}_4(t) dt$ mit $f(t) = \frac{1}{t^3}$.

d) Schätzen Sie $|\int_5^{\infty} f''(t) \tilde{B}_2(t) dt|$ und $|\int_n^{\infty} f^{(iv)}(t) \tilde{B}_4(t) dt|$ geeignet ab.

Aufgabe 29 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die k -te Spalte des Rombergschemas eine Folge von iterierten Quadratursummen $\{T_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ des Exaktheitsgrads $2k + 1$ ist, für die gilt

$$\int_a^b f(x) dx - T_i^{(k)} = \mathcal{O}(h^{2k+2}) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Abgabe: Dienstag, 03.06., 16.00 Uhr im Briefkasten 48.