

## Numerische Integration

### 1. Übung

#### Aufgabe 1 (10 Punkte)

$Z_n$  sei die Zerlegung von  $[0, 1]$  in  $n$  gleichgroße Teilintervalle.

- a) Für  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^2$ , berechne man  $S(Z_n)$  und  $s(Z_n)$ .  
b) Beweisen Sie mit Teil a), dass gilt  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ .

#### Aufgabe 2 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Kubatursummen

$$\begin{aligned} C_1(f) &:= \frac{1}{N^2} \sum_{k,\ell=1}^N f\left(\frac{2k-1}{2N}, \frac{2\ell-1}{2N}\right) \\ C_2(f) &:= \frac{1}{4N^2} \left( f(0,0) + f(1,0) + f(0,1) + f(1,1) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \left( f\left(\frac{k}{N}, 0\right) + f\left(\frac{k}{N}, 1\right) + f\left(0, \frac{k}{N}\right) + f\left(1, \frac{k}{N}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{N^2} \sum_{k,\ell=1}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \frac{\ell}{N}\right) \end{aligned}$$

für  $N \rightarrow \infty$  gegen  $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy$  konvergieren, wenn die Funktion  $f$  Riemann-integrierbar ist.

**Tip:** Auf dem Rechteck  $R_{k,\ell} := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right] \times \left[\frac{\ell-1}{N}, \frac{\ell}{N}\right]$  liegen  $f\left(\frac{2k-1}{2N}, \frac{2\ell-1}{2N}\right)$  und  $\frac{1}{4} \left( f\left(\frac{k-1}{N}, \frac{\ell-1}{N}\right) + f\left(\frac{k-1}{N}, \frac{\ell}{N}\right) + f\left(\frac{k}{N}, \frac{\ell-1}{N}\right) + f\left(\frac{k}{N}, \frac{\ell}{N}\right) \right)$  zwischen  $m_{k,\ell} := \min\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{k,\ell}\}$  und  $M_{k,\ell} := \max\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{k,\ell}\}$ .

#### Aufgabe 3 (2 Punkte)

Für die auf  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  definierte Funktion  $1_K$  mit

$$1_K(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

bestimme man die Ober- und Untersumme bei der Zerlegung des Quadrats  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  in  $n = 16$  gleichgroße Teilquadrate (Begründung mit Skizze reicht). Welche Schranken erhalten Sie hiermit für  $\pi$ ?

#### Aufgabe 4\* (10 Punkte)

Wie Aufgabe 3, nur mit  $n = 10^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , statt  $n = 16$  und MATLAB statt zeichnerische Lösung.

#### Abgabe:

Dienstag, 15.04. in der Vorlesung (Aufgaben 1 - 3)

Dienstag, 22.04. in der Vorlesung (Aufgaben 4\*)