

Vorlesung: Numerik I

WS 2009/2010

Dr. (USA) Maria Charina
Dipl. Math. Andreas Rademacher

Inhalt der Vorlesung:

- Kap.1 Einleitung
- Kap.2 Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
- Kap.3 Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
- Kap.4 Interpolation und Approximation
- Kap.5 Numerische Integration
- Kap.6 Nichtlineare Gleichungen

Das Skriptum kann ab Ende Oktober 2009 im Sekretariat Raum M527 erworben werden.

Klausurrelevanter Stoff:

- Lehramt: Kap. 1-4 (einschließlich Extrapolation);
Übungsblätter 2-9.
- Andere: alles

Klausurzulassung: mindestens 50% der über Übungsaufgaben erreichbaren Punkte

Klausurtermine:

- am 10.02.2010 von 10:30-14:00 Uhr im Audimax, HGII, HS4
- Nachtermin: am 29.03.2010 von 13:30-16:30 Uhr im Audimax

Anmeldung für die Übungen und MATLAB Tutorien:

- 1. Schritt Registrierung:
 - für IEEM-Studierende:
<https://www.mathematik.uni-dortmund.de/student/register/>
 - für Service-Studierende:
https://www.mathematik.uni-dortmund.de/student/register_service/
 - für restliche Studierende:
https://www.mathematik.uni-dortmund.de/student/register_fk/
- 2. Schritt Anmeldung:
<https://www.mathematik.uni-dortmund.de/student/login/>

Vorlesungshomepage:

www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/numerikI0910/

Übungsblätter (je 4 Aufgaben pro Blatt):

- Ausgabe: Mittwochs nach 14 Uhr
- Abgabe: Mittwochs vor 14 Uhr (je 2 Aufgaben pro Blatt)

Kap.1 Einleitung

Lineare Algebra, Analysis,....:

(I) Lösbarkeit eines mathematischen Problems

Numerik:

(II) Konditionierung (natürliche Stabilität) des mathematischen Problems

(III) Numerische Algorithmen zur näherungsweise Lösung des mathematischen Problems, deren numerische Stabilität

(IV) Effizienz und Konvergenzgeschwindigkeit von Algorithmen

1.1 Beispiel: (Nullstellenberechnung eines Polynoms)

Fundamental-Satz der linearen Algebra: Jedes Polynom n -ten Grades hat genau n komplexe Nullstellen. (I)

Geg.: $p_1(x) = x^3 + x^2 - 2$

Lösungsmethode: Raten einer der Nullstellen

$$p_1(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$$

Geg.: $p_2(x) = x^3 + x^2 - 2.1$

$$\text{Raten} \implies p_2(x) = x^3 + x^2 - 2.1 = ?$$

Lösungsmethode: numerische Algorithmen

1.2 Beispiel: (Cramersche Regel)

Geg.: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$, und $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Gesucht: $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

Satz: Die Lösung x von $Ax = b$ ergibt sich als

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}}{\det(A)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Determinantenberechnung: $2^n \cdot n!$ Rechenoperationen. **Ist nicht effizient!** (IV)

1.3 Beispiel:

Die eindeutige Lösung von

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{bmatrix}$$

ist $[x_1, x_2]^T = [2, -2]^T$. Die Näherungslösung von

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.8642 - 0.000000001 \\ 0.1440 + 0.000000001 \end{bmatrix}$$

ist $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [0.9911, -0.4870]^T$.

Das Problem ist **schlecht konditioniert!** (II)

1.4 Beispiel: (Berechnung einer Ableitung)

Berechne: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ für $f(x) = \cos x$.

Matlab-Programm:

```
h=1;  
for i=1:55  
    res=(cos(1+h)-cos(1))/h;  
    h=h/2;  
end
```

Exaktes Ergebnis ist $f'(1) = -0.8414709\dots$

Mit dem Matlab-Programm: $i=55$, $f'(1) \approx \text{res} = 0$.

Natürliche oder numerische Instabilität! (II),(III)

Kap.2 Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität

2.1 Arten von Fehlern

- Eingangsfehler (Datenfehler)
Messungenauigkeiten, Erhebungsfehler
- Diskretisierungsfehler
 - Riemannsche Summe statt Riemannschen Integrals
 - n -tes Glied einer Folge statt des Grenzwertes
 - n -te Partialsumme statt der Reihe
- Rundungsfehler

$$\frac{1}{3} \approx 0.\underbrace{3333\dots3}_{m \text{ Stellen}}$$

- Abbruchfehler
Abbruch unendlicher Algorithmen nach n Schritten
- Menschlicher Irrtum oder maschinelle Fehlfunktion:
Kein Gegenstand der Numerik, Kontrollmaßnahmen

2.2 Kondition eines mathematischen Problems

Problem: Auswertungen von $f : X \rightarrow Y$ an der Stelle $x \in X$

Ziel:



Setze Δy ins Verhältnis zu Δx

2.2.1 Beispiele:

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} .

2.2.2 Definition (Vektornorm): Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt eine Vektornorm auf V , falls

$$(N1) \quad \|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \text{und} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$$

$$(N2) \quad \text{Für alle } \alpha \in \mathbb{K} \text{ und } v \in V \text{ gilt } \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|;$$

$$(N3) \quad \text{Für alle } v, w \in V \text{ gilt } \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

2.2.3 Beispiele:

2.2.4 Bemerkung: Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ gilt

$$(N4) \quad \|v - w\| \geq \left| \|v\| - \|w\| \right|, \quad v, w \in V.$$

2.2.5 Hilfssatz: Jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{K}^n ist eine gleichmäßig stetige Funktion.

Beweis:

2.2.6 Hilfssatz (Normäquivalenz): Auf dem endlichdimensionalen Vektorraum \mathbb{K}^n sind alle Vektornormen äquivalent, d.h.: Zu je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ gibt es positive Konstanten m, M mit denen gilt

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|' \quad , \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis:

2.2.7 Bemerkung: Mit Hilfe einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{K}^n läßt sich die Konvergenz einer Vektorfolge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ erklären durch

$$x^{(k)} \rightarrow x \quad \iff \quad \|x^{(k)} - x\| \rightarrow .0, \quad k \rightarrow \infty$$

2.2.8 Definition (absolute und relative Fehler): Seien X, Y zwei normierte Räume mit zugehörigen Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$.

$$\text{(absolute Fehler)} \quad \varepsilon_x := \|\Delta x\|_X, \quad \varepsilon_y := \|\Delta y\|_Y.$$

$$\text{(relative Fehler)} \quad \delta_x := \frac{\|\Delta x\|_X}{\|x\|_X}, \quad \delta_y := \frac{\|\Delta y\|_Y}{\|y\|_Y}$$

Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleiner Schranken für $\frac{\delta_y}{\delta_x}$, $\delta_x \rightarrow 0$ existieren.

2.2.9 Definition (Landau-Symbole): Seien $g, h : X \rightarrow Y$, g stetig in einer Umgebung von Null. Wir sagen:

- g ist von Ordnung groß \mathcal{O} von h ($g(x) = \mathcal{O}(h(x)), x \rightarrow 0$), wenn

$$\exists C, \epsilon > 0 : \|x\|_X < \epsilon \Rightarrow \|g(x)\|_Y \leq C \|h(x)\|_Y;$$

- g ist von Ordnung klein o von h ($g(x) = o(h(x)), x \rightarrow 0$), wenn

$$\exists C : X \rightarrow \mathbb{R}_+, \epsilon > 0 : \|x\|_X < \epsilon \Rightarrow \|g(x)\|_Y \leq C(x) \|h(x)\|_Y$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 0$$

2.2.10 Beispiele:

2.2.11 Relative Konditionszahlen eines mathematischen Problems

Seien $f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, Ω offen, konvex, und $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, zweimal stetig differenzierbar.

Taylorentwicklung \Rightarrow für $\tilde{x} = x + \varepsilon_x \in \Omega$ in der 1.Näherung gilt

$$\left| \frac{f_i(\tilde{x}) - f_i(x)}{f_i(x)} \right| \leq \max_{j=1, \dots, n} |k_{i,j}(x)| \cdot \left\| \frac{\Delta x}{x} \right\|_1 \spadesuit$$

mit relativen Konditionszahlen bzgl. der relativen Eigangsfehler

$$(2.2.13) \quad k_{i,j}(x) := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{x_j}{f_i(x)}, \quad x \in \Omega. \spadesuit$$

2.2.12 Beispiel:

(2.2.14 Definition (Konditionierung math. Probleme): Man nennt das Problem der Berechnung von $y = f(x)$, $x \in \Omega$, schlecht konditioniert, wenn ein $|k_{i,j}| \gg 1$ ist; andernfalls gut konditioniert. Im Fall $|k_{i,j}| < 1$ spricht man von Fehlerdämpfung und im Fall $|k_{i,j}| > 1$ von Fehlerverstärkung.

2.2.15 Konditionierung arithmetischer Grundoperationen

- Die Addition $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{x_1}{f(x)} = 1 \cdot \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{x_2}{f(x)} = 1 \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

ist schlecht konditioniert für $x_1 \approx -x_2$.

- Die Multiplikation $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ mit

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{x_1}{f(x)} = x_2 \cdot \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} = 1$$

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{x_2}{f(x)} = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} = 1$$

ist generell gut konditioniert. Dasselbe gilt für Division.

2.2.16 Konditionierung von $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das Problem der Berechnung von $x_1^2 - x_2^2$ mit

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{x_1}{f(x)} = 2x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{2}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}$$

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{x_2}{f(x)} = 2x_2 \cdot \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2}{1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2}$$

ist schlecht konditioniert für $x_1 \approx \pm x_2$.

2.2.17 Lösung quadratischer Gleichungen

Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$. Löse $y^2 - py + q = 0$:

Vietascher Wurzelsatz: $y_{1,2}(p, q) = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sowie
 $p = y_1 + y_2$ und $q = y_1 \cdot y_2$.

Mit

$$\left. \begin{array}{l} p = y_1 + y_2 \\ q = y_1 \cdot y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial p} = \frac{-y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial p} = \frac{y_2}{y_2 - y_1}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial q} = \frac{-1}{y_1 - y_2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial q} = \frac{1}{y_1 - y_2} \end{array}$$

folgt

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= \frac{\partial y_1}{\partial p}(p, q) \cdot \frac{p}{y_1(p, q)} = \frac{y_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{y_2 - y_1} \\ k_{1,2} &= \frac{\partial y_1}{\partial q}(p, q) \cdot \frac{q}{y_1} = \frac{1}{y_1 - y_2} \cdot \frac{y_1 \cdot y_2}{y_1} = \frac{y_2}{y_1 - y_2} \end{aligned}$$

und analog für $k_{2,1}$ und $k_{2,2}$. Also ist die Berechnung von y_1, y_2 schlecht konditioniert für $y_1 \approx y_2$.

2.3 Rundungsfehler und Gleitkommaarithmetik

2.3.1 Definition (Gleitkommazahlen): Die Menge $fl = fl(B, m, E_s)$ von Gleitkommazahlen zur Basis $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$, mit Mantissenlänge $m \in \mathbb{N}$ und Exponentenbereich $E_s \subset \mathbb{N}$ besteht aus allen reellen Zahlen der Form

$$\pm \left(\sum_{j=1}^m d_j \cdot B^{-j} \right) \times B^{\pm e}, \quad e = \sum_{k \in E_s} e_k \cdot B^k,$$

mit $d_j, e_k \in \{0, \dots, B-1\}$ und $E_s = \{0, \dots, s-1\}$.

Die Zahl $x \in fl$ heißt normalisiert, wenn $d_1 \neq 0$.

2.3.2 Bemerkung:

- (i) Moderne Rechner verwenden $B = 2, 10, 16$.
- (ii) Die Verwendung der Gleitkommazahlen im numerischen Rechnen ist wesentlich, um Zahlen unterschiedlicher Größe verarbeiten zu können.

2.3.3 Beispiele:

♣ 2.3.4 Bemerkung: Die Menge fl ist endlich \Rightarrow zulässiger Bereich für Gleitkommazahlen ist

$$D(fl) := [x_{min}, x_{negmax}] \cup \{0\} \cup [x_{posmin}, x_{max}]$$

mit

$$x_{min,max} = \pm(1 - B^{-m})B^{B^s-1} \quad \text{und} \quad x_{negmax,posmin} = \pm B^{-B^s}.$$

2.3.5 Definition (Rundungsoperator): Es seien $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$, gerade, $m \in \mathbb{N}$, $E_s \subset \mathbb{N}$, und

$$x = \pm \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j \cdot B^{-j} \right) \times B^{\pm e} \in \mathbb{R}.$$

Definiere den Rundungsoperator $\text{rd} : \mathbb{R} \rightarrow fl(B, m, E_s)$ mit

$$\text{rd}(x) = \begin{cases} \pm \left(\sum_{j=1}^m d_j \cdot B^{-j} \right) \times B^{\pm e} & , \text{ falls } d_{m+1} < \frac{B}{2}, \\ \pm \left(\sum_{j=1}^m d_j \cdot B^{-j} + B^{-m} \right) \times B^{\pm e} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

2.3.6 Satz: Es seien $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$, gerade, $m \in \mathbb{N}$, $E_s \subset \mathbb{N}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$x = \pm \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j \cdot B^{-j} \right) \times B^{\pm e}, \quad e \in E_s :$$

(i) für den absoluten Rundungsfehler $|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{1}{2} B^{e-m}$

(ii) für den relativen Rundungsfehler $\left| \frac{\text{rd}(x) - x}{x} \right| \leq \frac{1}{2} B^{-m+1}$

2.3.7 Korollar: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.6 gilt

$$\text{rd}(x) = x(1 + \delta_x) \quad \text{mit} \quad |\delta_x| \leq \frac{1}{2} B^{-m+1} =: \text{eps.}$$

Beweis:

2.3.8 Beispiel:

2.3.9 Bemerkung: Die Zahl $\text{eps} = \frac{1}{2}B^{-m+1}$ wird relative Rechengenauigkeit der m -stelligen Gleitkommaarithmetik oder Rundungsfehlereinheit genannt.

2.3.10 Definition: Bei dem Standardmodell der Gleitkommaarithmetik sind die Gleitkommaoperationen

$$\{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\} : fl \times fl \rightarrow fl$$

definiert durch

$$x \odot y := \text{rd}(x \cdot y) = (x \cdot y)(1 + \delta), \quad |\delta| \leq \text{eps}, \quad \odot \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}.$$

2.3.11 Beispiele:

2.4 Numerische Stabilität von Algorithmen

2.4.1 Beispiel:

2.4.2 Definition: Ein Algorithmus zur Berechnung der Funktion

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Omega \text{ offen, konvex,}$$

an der Stelle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ist eine Zerlegung von f in elementare Abbildungen (arithmetische Grundoperationen)

$$\phi^{(i)}; \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}, \quad \Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 0, \dots, r,$$

und führt von $x^{(0)} := x$ über eine Kette von Zwischenergebnissen

$$x =: x^{(0)} \mapsto \phi^{(0)}(x^{(0)}) = x^{(1)} \mapsto \dots \mapsto \phi^{(r)}(x^{(r)}) = x^{(r+1)} = y$$

zu y . Äquivalent schreibt man

$$y = f(x) = \phi^{(r)} \circ \phi^{(r-1)} \circ \dots \circ \phi^{(0)}(x), \quad x \in \Omega,$$

und nennt die zusammengesetzte Abbildung $\phi^{(r)} \circ \dots \circ \phi^{(0)}$ einen Algorithmus zur Berechnung von $y = f(x)$, $x \in \Omega$.

2.4.3 Bemerkung: Ein Fehler, der bei Berechnung von $\phi^{(i)}$ auftritt, geht in die Restabbildung $\phi^{(r)} \circ \dots \circ \phi^{(i+1)}$ als Eingangsfehler ein und wird durch diese an das Endresultat weitergegeben.

2.4.4 Definition: Ein Algorithmus $\phi^{(r)} \circ \dots \circ \phi^{(0)}$ heißt numerisch stabil, wenn der im Verlaufe der Ausführung akkumulierte Fehler den durch die Konditionierung des Problems $y = f(x)$ bedingten unvermeidbaren Problemfehler nicht übersteigt.

2.4.5, 2.4.6, 2.4.7 Beispiele