Musterlösung zu Aufgabenblatt 15

28. Januar 2010

Aufgabe 15.1 (i)

Zu bestimmen ist die Gauß-Legendre-Quadratur-Formel mit $n = 2$ und $[a, b] = [-1, 1]$. Die Knoten $x_0, \dots, x_n$ sind die Nullstellen des orthonormalen Polynoms p vom Grad $n+1$ bzgl. des Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Die Gewichte a_k sind definiert als

$$a_k := \int_{-1}^{1} l_k(x)\,dx,$$

wobei

$$l_k(x) := \prod_{l=0, l\neq k}^{n} \frac{x - x_l}{x_k - x_l}. \tag{1}$$

Die Quadraturformel ist dann gegeben durch

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k) + R(f).$$

Gesucht: x_0, x_1, x_2 und a_0, a_1, a_2

Dazu ist zunächst das orthonormale Polynom $p(x) := x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathcal{P}_3$ zu bestimmen, für das

$$(p, q) = 0, \qquad \forall q \in \mathcal{P}_2 \tag{2}$$

gilt. Aus (2) folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot x^0\,dx &= \frac{2}{3}\alpha_2 + 2\alpha_0 \\ 0 = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot x^0\,dx &= \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\alpha_1 \\ 0 = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot x^0\,dx &= \frac{2}{5}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_0. \end{aligned}$$

Dessen Lösung lautet: $\alpha_2 = \alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 = -\frac{3}{5}$. Damit erhalten wir

$$p(x) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Die Nullstellen von p, $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, sind die Knoten der gesuchten Quadraturformel.

Aus Definition (1) folgt

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{5}{6}x\left(x-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ l_1(x) &= -\frac{5}{3}x^2+1 \\ l_2(x) &= \frac{5}{6}x\left(x+\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \end{aligned}$$

und somit ergibt sich für die Gewichte a_k:

$$\begin{aligned} a_0 = \int_{-1}^{1} l_0(x)\,dx &= \frac{5}{9} \\ a_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)\,dx &= \frac{8}{9} \\ a_2 = \int_{-1}^{1} l_2(x)\,dx &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit die folgende Quadraturformel:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + R(f).$$

Aufgabe 15.1 (ii)

Es sei $\omega(x) = \sqrt{|x|}$. Gesucht ist die Gaußsche Quadraturformel, die das Integral

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)\,dx$$

für alle Polynome aus $\mathcal{P}_3$ exakt integriert. Nach der Theorie brauchen wir dazu die orthogonalen Polynome bis Grad 2 zum Skalarprodukt

$$(f,g)_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)\,dx.$$

Aufgrund der Symmetrie der Intervallgrenzen gilt

$$(x,1)_\omega = \left(x^2,x\right)_\omega = 0. \tag{3}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1 \\ p_1(x) &:= x-\gamma \\ p_2(x) &:= x^2-\alpha x-\beta. \end{aligned}$$

Aus der Forderung $(p_1,p_0)_\omega = 0$ folgt mit (3)

$$(p_1,p_0)_\omega = (x-\gamma,1)_\omega = -\gamma(1,1)_\omega = 0.$$

Daraus ergibt sich nun direkt $\gamma = 0$ und damit $p_1(x) = x$. Aus der Eigenschaft $(p_2,p_1)_\omega = 0$ folgt wieder mit (3)

$$(p_2,p_1)_\omega = \left(x^2-\alpha x-\beta,x\right)_\omega = -\alpha\,(x,x)_\omega = 0$$

und damit $\alpha = 0$. Zudem muss $(p_2,p_0)_\omega = 0$ gelten. Zusammen mit (3) liefert dies

$$(p_2,p_0)_\omega = \left(x^2-\alpha x-\beta,1\right)_\omega = \left(x^2-\beta,1\right)_\omega = 0.$$

Woraus $\beta = \frac{3}{7}$ also $p_2(x) = x^2 - \frac{3}{7}$ folgt. Die Knoten der Quadraturformel x_0 und x_1 sind durch die Nullstellen von p_2 gegeben, d.h. $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ und $x_1 = \sqrt{\frac{3}{7}}$.
Die Gewichte a_0 und a_1 der Gaußsche Quadraturformel sind nach der Vorlesung gegeben durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \sqrt{|x|}\, dx, \\ a_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \sqrt{|x|}\, dx. \end{aligned}$$

Mit (3) erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \sqrt{|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{-x_0}{x_1 - x_0} \sqrt{|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit die folgende Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} \omega(x) f(x)\, dx = \frac{2}{3} \left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}} \right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{7}} \right) \right] + R(f).$$

Aufgabe 15.1 (iii)

Das Gewicht der Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel ist

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die orthogonalen Polynome zum Skalarprodukt

$$(f, g)_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) g(x)\, dx$$

sind die Tschebyscheff-Polynome T_n mit

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Ihre Nullstellen sind

$$x_i = \cos\left(\frac{1}{2} \pi \frac{2i+1}{n+1} \right), \quad i = 0, \ldots, n$$

und die dazugehörigen Gewichte sind

$$a_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Für die Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f\left(x_k\right)$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$I(f\omega) - I_n(f\omega) = R_n(f\omega) = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \tag{4}$$

mit $\xi \in (-1,1)$ und $I(fw) = (f,1)_\omega$.
Für die zu integrierende Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ gilt

$$\max_{x\in[0,1]} \left|f^{(n)}(x)\right| = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^n$$

und somit

$$\left|f^{(2n+2)}(\xi)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{2n+2}.$$

Aus (4) folgt nun für $n = 2$

$$|R_2(f\omega)| \leq \frac{2\pi}{2^6 6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 \approx 2.37 \cdot 10^{-3}$$

und für $n = 3$

$$|R_3(f\omega)| \leq \frac{2\pi}{2^8 8!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 \approx 2.25 \cdot 10^{-5}.$$

Da der Fehler $\leq 10^{-4}$ sein soll, reicht es aus die Quadraturformel zu $n = 3$ zu verwenden. Die Gewichte sind $a_i = \frac{\pi}{4}$, $i = 0, \ldots, 3$ und die Knoten

$$\begin{aligned} x_0 = -x_3 &\approx -0.923879 \\ x_1 = -x_2 &\approx -0.382683. \end{aligned}$$

Da der Cosinus eine gerade Funktion ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(x_0) &= \cos(x_3) \\ \cos(x_1) &= \cos(x_2). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Quadraturformel

$$\begin{aligned} I_3(f\omega) &= \frac{\pi}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi x_0\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\pi x_1\right)\right] \\ &\approx 1.48281. \end{aligned}$$

Aufgabe 15.2 (i)

Für das Romberg-Verfahren setzen wir

$$a(h) := \frac{1}{2}h\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

mit

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 1, \ldots, N-1.$$

Das Verfahren basiert auf der Extrapolation von $a(h)$ zum Grenzwert $\lim_{h\to 0} a(h)$. Damit erhält man die Interationsvorschrift

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= a(h_i), \quad i = 0, \ldots, m \\ a_{j,k} &= a_{j,k-1} + \frac{a_{j,k-1} - a_{j-1,k-1}}{\left(\frac{h_{j-k}}{h_j}\right)^2 - 1}, \quad k = 1, \ldots, m,\ j = k, \ldots, m \end{aligned}$$

mit einer Schrittweitenfolge $h_0 > h_1 > \ldots > h_m$. Die Zahlen $a_{k,k}$ sind dann Näherungen an $a(0)$. Die Einträge der zweiten Spalte des Romberg-Schemas $a_{i,1}$ sind

$$\begin{aligned} a_{i,1} &= a_{i,0} + \frac{a_{i,0} - a_{i-1,0}}{\left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{3}\left(4a_{i,0} - a_{i-1,0}\right), \end{aligned}$$

wobei $2h_{i-1} = h_i$. $a_{i,0}$ ist die Näherung zur Schrittweite $\frac{h}{2}$ und $a_{i-1,0}$ die zur Schrittweite h, damit erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= \frac{1}{2}h\left[\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \sum_{k=1}^{2N-1} f\left(a + k\frac{h}{2}\right)\right], \\ a_{i-1,0} &= h\left[\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \sum_{l=1}^{N-1} f\left(a + lh\right)\right]. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so

$$\begin{aligned} a_{i,1} &= \frac{1}{6}h\left[2f(a) + 2f(b) + 4\sum_{k=1}^{2N-1} f\left(a + \frac{1}{2}kh\right) - f(a) - f(b) - 2\sum_{l=1}^{N-1} f\left(a + lh\right)\right] \\ &= \frac{1}{6}h\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{2N-1} f\left(a + \frac{1}{2}kh\right) + 2\sum_{\substack{l=2 \\ l \text{ gerade}}}^{N-2} f\left(a + \frac{1}{2}lh\right)\right] \\ &= \frac{1}{6}h\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x_k\right) + 4\sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{x_l + x_{l+1}}{2}\right) + f(b)\right], \end{aligned}$$

was gerade der summierten Simpson-Regel entspricht.

Aufgabe 15.2 (ii)

Wir setzen $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}$, $a = 0$ und $b = 1$. Wir benutzen die Schrittweitenfolge $h_i = 2^{-i-1}$, $i = 0, 1, \ldots$. Insgesamt ergibt sich so das Extrapolationstableau

i	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
0	-0.079264507			
1	-0.068367174	-0.064734729		
2	-0.065393558	-0.064402352	-0.064380193	
3	-0.064605103	-0.064342284	-0.064338279	-0.064337613

Aufgabe 15.2 (iii)

Mit der Notation von oben erhalten wir für $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ und $b = \frac{\pi}{2}$ die folgenden Resultate mit dem Romberg-Verfahren: Wir verwenden hier laut Aufgabenstellung die Schrittweitenfolge $h_i = 2^{-i-1}\pi$, $i = 0, 1, \ldots$. Damit ergibt sich

$$\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^2 = \left(\frac{2^{-i+k-1}\pi}{2^{-i-1}\pi}\right)^2 = 2^{2k}.$$

Wir erhalten das Extrapolationstableau

i	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
0	0.785398			
1	0.948059	1.00228		
2	0.987116	1.000135	0.999991	
3	0.996785	1.000008	0.99999988	1.0000000081

.

Laut Bemerkung 4.4.4 gilt für den Fehler bei der Extrapolation die Näherung

$$|a(0) - a_{i,i}| \approx 2\,|a_{i,i} - a_{i+1,i}|\,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} 2\,|a_{0,0} - a_{1,0}| &= 0.3253226 \\ 2\,|a_{1,1} - a_{2,1}| &= 4.290585 \cdot 10^{-3} \\ 2\,|a_{2,2} - a_{2,3}| &= 1.66215 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Damit war $a_{2,2}$ schon die gesuchte Näherung an $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$.