Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.Math. K. Siemko

Dortmund, 14.12.2007

Probeklausur Einführung in die Numerische Mathematik
Lösungen

Aufgabe 1

Wegen $A = A^{-1}$ gilt für jede der vier Matrixnormen $cond(A) = M(A)^2$.

(i) Die lub_1-Norm ist die Spaltensummennorm. Hier daher

$$cond_1(A) = lub_1(A)^2 = \Big(\max\{\frac{13}{9}, \frac{13}{9}, \frac{5}{3}\}\Big)^2 = \frac{25}{9} = 2,\overline{7}.$$

(ii) Die Spektralnorm $lub_2(A)$ ist die Wurzel aus dem größten Eigenwert von $A^T \cdot A = A \cdot A = E$, also

$$cond_2(A) = lub_2(A)^2 = 1,$$

denn E hat nur 1 als Eigenwert.

(iii) Die lub_∞-Norm ist die Zeilensummennorm. Wegen $A = A^T$ ist das auch die Spaltensummennorm, also

$$cond_\infty(A) = lub_\infty(A)^2 = lub_1(A)^2 = \frac{25}{9} = 2,\overline{7}.$$

(iv) $M_F(A) = \sqrt{(1+64+16+64+1+16+16+16+49)/81} = \sqrt{3}$. Daher

$$cond_F(A) = 3.$$

Aufgabe 2

(i) A_2 ist nicht positiv definit, weil auf Hauptdiagonale eine negative Zahl steht. (Anderes Argument: Der zweite Hauptminor ist $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$)

(ii) Die Cholesky-Zerlegung ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(i) x_k ist (in Metern) der Abstand von Schicht k zum heutigen Niveau, $k = 1, 2, 3$. Das gibt das überbestimmte Gleichungssystem

$$x_1 = 3,47,\ x_2 = 2,01,\ x_3 = 1,58,\ x_1 - x_2 = 1,42,\ x_1 - x_3 = 1,92,\ x_2 - x_3 = 0,44.$$

In Matrix-Vektorschreibweise also $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3,47 \\ 2,01 \\ 1,58 \\ 1,42 \\ 1,92 \\ 0,44 \end{pmatrix}.$$

(ii) Multiplikation von links mit A^T gibt die Normalengleichungen

$$A^T A x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6,81 \\ 1,03 \\ -0,78 \end{pmatrix}.$$

(iii) Das Gleichungssystem aus (ii) hat als Lösung

$$x_1 = 3,4675, \;\; x_2 = 2,0225, \;\; x_3 = 1,57.$$

Bemerkung (nicht relevant für Punktevergabe): Man hat sich also bei x_1 nur um $2,5$mm, bei x_2 um $12,5$mm und bei x_3 um 10 mm vermessen.

Aufgabe 4
(i) $p \in \mathcal{P}_2$ soll die Interpolationsbedingungen

$$p(0) = \cos(\pi \cdot 0) = 1, \quad p(\frac{1}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad p(1) = \cos(\pi \cdot 1) = -1$$

erfüllen. Der Ansatz mit der Vandermondematrix liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Lösung

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_3 = 0,$$

also $p(x) = 1 - 2x$.
(ii) Die Fehlerdarstellung

$$f(x) - p(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\omega(x) \;\; \text{mit } \xi \in [0,1]$$

und mit $\omega(x) = x(x-\frac{1}{2})(x-1)$ gibt zusammen mit der Maximum-Norm $\|g\|_\infty := \max_{0 \le x \le 1} |g(x)|$

$$\|f - p\|_\infty \le \frac{\|f'''\|_\infty}{3!} \|\omega\|_\infty.$$

Wegen $f'''(x) = \pi^3 \sin(\pi \cdot x)$ und wegen (man muss nicht immer die schärfste Abschätzung nehmen, wenn die nicht verlangt wird!)

$$|\omega(x)| = |x| \cdot |x - \frac{1}{2}| \cdot |x-1| \le 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

bekommt man daher

$$\|f - p\|_\infty \le \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2} = \frac{\pi^3}{12} (\approx 2,5838\ldots).$$

Bemerkung (nicht relevant für Punktevergabe): Genauere Rechnung zeigt

$$\|\omega\|_\infty = \omega(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Das führt zur besseren Abschätzung

$$\|f - p\|_\infty \le \frac{\pi^3}{3!}\frac{\sqrt{3}}{36} (\approx 0,24863\ldots).$$