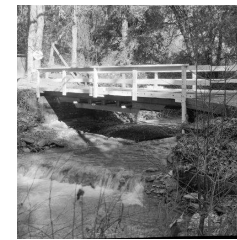


# Mathematische Methoden der Bildverarbeitung

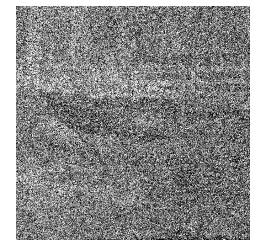
Prof. Dr. Joachim Stöckler  
Dr.(USA) Maria Charina

## II. Bildentrauschen: Filtertechniken



Originalbild  $B$

→ FILTER →



Verrauschtes Bild

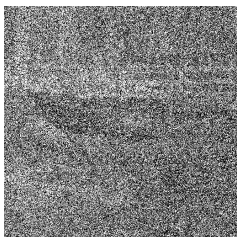
$$B_F = \text{Filter}(B) + \eta$$

FILTER: Scanner, digitale Cameras, Internetübertragung ...

$\eta$ : additives Rauschen = unvorhersehbare Filterfehler

Ziel: Umkehrung der Filtertransformation und Rauschunterdrückung

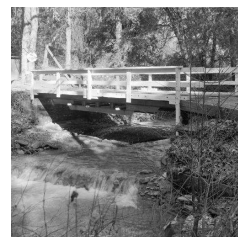
## II. Bildentrauschen: Filtertechniken für additives Rauschen



Verrauschtes Bild

$$B_F = B + \eta$$

→ FILTER →



Entrauschtes Bild

$$\approx B$$

FILTER: Transformation zur Rauschunterdrückung

## II.1 Datenunabhängiges Rauschen: Gaußsches weißes Rauschen

$$\eta \sim N(0, \sigma^2)$$



Originalbild

$$\sigma^2 = 3$$

$$\sigma^2 = 10$$

$$\sigma^2 = 13$$

## II.1 Datenunabhängiges Rauschen: Salt-und-Pepper, Schnee



Originalbild

$p = 0.1$

$p = 0.3$

$p = 0.5$

$$p := \frac{\text{Anzahl von fehlerbehafteten Pixeln}}{\text{Anzahl von Pixeln}}$$



## II.1 Datenunabhängiges Rauschen mit MATLAB

### 1. Gaußsches weißes Rauschen:

$$\sigma^2 = 0.03 * (\max(B(:)) - \min(B(:)));$$

$$B_F = B + \sigma^2 * \text{randn}(\text{size}(B));$$

oder

$$\text{imnoise}(B, \text{'gaussian'}, \sigma^2);$$

### 2. Salt-und-Pepper: mit $X, Y = \text{rand}(1)$

$$B_F[m, k] := \begin{cases} B[m, n] & X < p, \\ 0 & X \geq p \text{ und } Y < 0.5, \\ 255 & X \geq p \text{ und } Y \geq 0.5. \end{cases}$$

oder

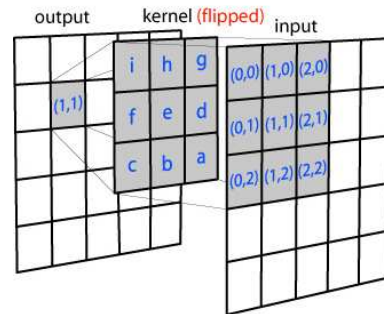
$$\text{imnoise}(B, \text{'salt \& pepper'});$$



## II.2 Lineare zeitinvariante Filter: 2-dim Faltung

	$m$			
$n$		-1	0	1
-1	a	b	c	
0	d	e	f	
1	g	h	i	

Filter H:



Berechnung von

$$(H * B)[1, 1] = i * B[0, 0] + h * B[1, 0] + g * B[2, 0] + f * B[0, 1] + ..$$



## II.2 Lineare zeitinvariante Filter: 2-dim Faltung

Definition: Seien  $H, B \in \ell(\mathbb{Z}^2)$ .

$$(H * B)[m, k] = \sum_{n, \ell \in \mathbb{Z}} B[n, \ell] H[m - n, k - \ell], \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Satz: Seien  $H \in \ell_1(\mathbb{Z}^2)$  und  $B \in \ell_p(\mathbb{Z}^2)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt

$$\|H * B\|_p \leq \|H\|_1 \cdot \|B\|_p, \quad \text{d.h. } H * B \in \ell_p(\mathbb{Z}^2).$$

Beweis: Seien  $1 < p, q < \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$ .

$$\begin{aligned} \|H * B\|_p^p &\leq \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{n, \ell \in \mathbb{Z}} |B[n, \ell]| \cdot |H[m - n, k - \ell]| \right)^p \\ &= \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{n, \ell \in \mathbb{Z}} |B[n, \ell]|^{1/q} \cdot |B[n, \ell]|^{1/p} |H[m - n, k - \ell]| \right)^p \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{n, \ell \in \mathbb{Z}} |B[n, \ell]| \right)^{p/q} \cdot \left( \sum_{n, \ell \in \mathbb{Z}} |B[n, \ell]| |H[m - n, k - \ell]|^p \right)^p \\ &= \|H\|^{p/q+1} \|B\|_p^p, \quad \text{wobei } p/q + 1 = p(1/p + 1/q) = p. \quad \square \end{aligned}$$



## II.2 Lineare zeitinvariante Filter: 2-dim Faltung

Beispiel:  $H$  grau,  $B$  weiss,

1	2	1			
0	0	1	2	3	
-1	-2	-1	5	6	
			7	8	9

$$(H * B)[0, 0] = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot 5 = -13$$

1	2	1			
0	1	0	2	3	
-1	4	-2	-1	6	
			7	8	9

$$(H * B)[0, 1] = -20$$

		1	2	1	
1	0	2	0	3	0
4	-1	5	-2	-1	
7	8	9			

$$(H * B)[0, 2] = -17 \quad \dots$$

1	2	1	3		
0	1	0	5	6	
-1	7	-2	-1	9	

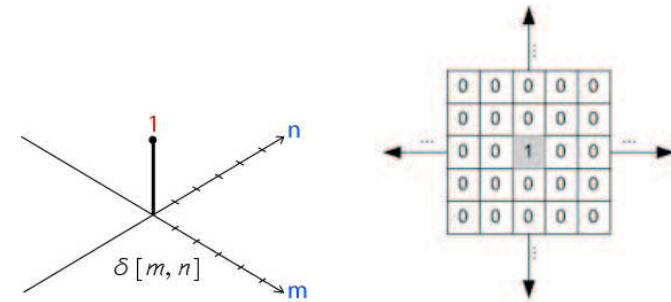
$$(H * B)[1, 1] = -24$$

1	2	3			
4	1	5	2	6	1
7	0	8	0	9	0
		-1	-2	-1	

$$(H * B)[2, 2] = 17$$

## II.2 Lineare zeitinvariante Filter (LTI-Filter)

Einheits-Impulsfolge  $\delta \in \ell_0(\mathbb{Z}^2)$



Impulsantwort eines Filters ist eine Folge  $H = \text{Filter}(\delta) \in \ell(\mathbb{Z}^2)$ .

Stabilität: Filter :  $\ell_p(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \ell_p(\mathbb{Z}^2)$ ,  $H \in \ell_1(\mathbb{Z}^2)$ .

Stabile LTI-Filter: Filter( $B$ ) =  $H * B$ ,  $B \in \ell_p(\mathbb{Z}^2)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

## II.2 Lineare zeitinvariante Filter: Fourier-Transformation

Definition: Sei  $H \in \ell(\mathbb{Z}^2)$ . Die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$\hat{H}(\xi) = \sum_{m,k \in \mathbb{Z}} H[m, k] e^{-im \cdot \xi_1} e^{-ik \cdot \xi_2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

heißt die F-Transformierte von  $H$ , falls die Reihe konvergiert.

Bemerkungen:

(i)  $H \in \ell_1(\mathbb{Z}^2) \Rightarrow \hat{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist gleichmäßig stetig.

(ii)  $H \in \ell_2(\mathbb{Z}^2) \Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{H}(\xi) - \sum_{-n \leq m, k \leq n} H[m, k] e^{-im \cdot \xi_1} e^{-ik \cdot \xi_2} \right|^2 d\xi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

## II.2 Lineare zeitinvariante Filter: Faltungssatz

Satz: Seien  $H, B \in \ell_1(\mathbb{Z}^2)$ , dann gilt  $H * B \in \ell_1(\mathbb{Z}^2)$  und

$$(\widehat{H * B})(\xi) = \hat{H}(\xi) \cdot \hat{B}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Beweis:

II.2 LTI-Filter: Gaußsches weißes Rauschen  $\sigma^2 = 1$



Verrauschtes Bild

Gauß-Filter:  $3 \times 3$

Gauß-Filter  $5 \times 5$



II.2 LTI-Filter: Gaußsches weißes Rauschen  $\sigma^2 = 1$



Verrauschtes Bild

Mittelwert-Filter:  $3 \times 3$

$5 \times 5$



II.2 LTI-Filter: Salt-und-Pepper 25%



Verrauschtes Bild

Gauß-Filter:  $3 \times 3$

Gauß-Filter  $5 \times 5$



II.2 LTI-Filter: Salt-und-Pepper 25%



Verrauschtes Bild

Mittelwert-Filter:  $3 \times 3$

$5 \times 5$



### II.3 Nichtlineare Rangordnungsfiler: Salt-und-Pepper 25%



Verrauschtes Bild

Median-Filer:  $3 \times 3$

$5 \times 5$



### II.3 Nichtlineare Rangordnungsfiler: Gaußsches weißes Rauschen $\sigma^2 = 1$



Verrauschtes Bild

Median-Filer:  $3 \times 3$

$5 \times 5$



### II.3 Bilateralfilter:



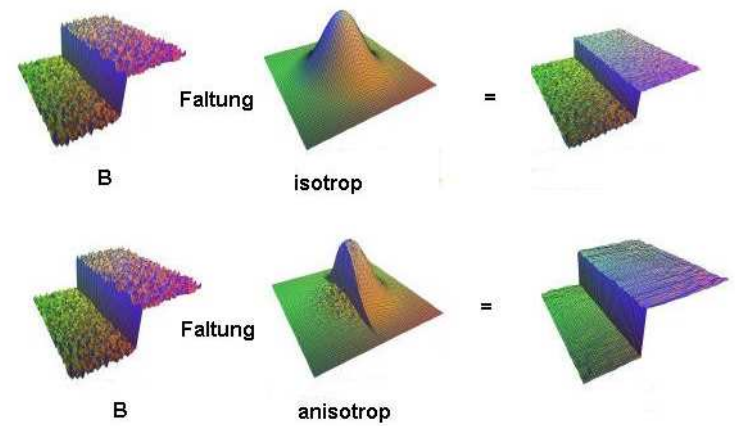
Anisotropic Diffusion: kein Flüß durch die Bild-Kanten

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (c(u) \nabla u(x, t)), \quad t > 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$u(x, 0) = B(x)$$



### II.3 Bilateralfilter:



Anisotropic Diffusion = datenabhängiger Filer



## II.4 Bildentrauschen: Inverser Filter und Wiener Filter



→ dig. Camera →



Originalbild  $B$

$$B_F = \text{Blur}(B) + \eta$$

**Ziel:** Umkehrung der Filtertransformation und Rauschunterdrückung



## II.4.1 Inverser Filter und Pseudoinverser Filter



Originalbild  $B$

$$\text{Blur}(B) + \eta$$

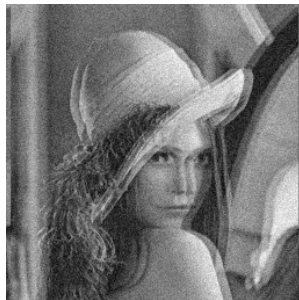
Näherung an  $B$

$$\hat{H}^\dagger(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{H}(\xi)} & \hat{H}(\xi) \neq 0, \\ 0 & \hat{H}(\xi) = 0, \end{cases} \quad H = \text{Blur}$$

Nachteile: Rauschverstärkung



## II.4.2 Wiener Filter



Originalbild  $B$

$$\text{Blur}(B) + \eta$$

Näherung an  $B$

**Ziel:**  $E(\|B - \text{Näherung an } B\|^2) \rightarrow \min$



## II.4.2 Beispiel (bedingter Erwartungswert): 2 dreiseitige Würfel wurden 400 mal zusammen geworfen. Ereignisraum

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Augensumme  $X : \Omega \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6\}$  und Minimum  $Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$  mit

$X$	2	3	4	5	6	$Y$	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$P(Y = y)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

und die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  und  $Y$

$Y \setminus X$	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
3	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$

Der bedingte Erwartungswert  $E(X|Y) : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine ZV mit Werten

$$E(X|Y = j) = \sum_{x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}} x \cdot P(X = x|Y = j), \quad j = 1, 2, 3.$$



## II.4.2 Beispiel (bedingter Erwartungswert):

Also mit  $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$  gilt

$$E(X|Y = 1) = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} + 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} + 4 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$E(X|Y = 2) = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{3} + 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{3} = \frac{14}{3}$$

$$E(X|Y = 3) = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{1} = 6$$

und die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $E(X|Y)$  ist

$E(X Y)$	$\frac{16}{5}$	$\frac{14}{3}$	$6$
$P(E(X Y) = E(X Y = y))$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

Beachte:  $P(E(X|Y) = E(X|Y = y)) = P(Y = y)$  gilt nur weil  $E(X|Y = y_1) \neq E(X|Y = y_2)$  für  $y_1 \neq y_2, y_1, y_2 \in \{1, 2, 3\}$ . Sonst soll man die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten von  $Y$  addieren.

## II.4.2 Wiener Filter

Korollar:  $E((X - T(Y))^2)$  ist minimal wenn  $E(E((X - T(Y))^2|Y))$  minimal ist.

Beweis: Es gilt

$$E((X - T(Y))^2) = \sum_{x \in \Omega'_x} \sum_{y \in \Omega'_y} (x - T(y))^2 \cdot P(X = x, Y = y)$$

und

$$\begin{aligned} E(E((X - T(Y))^2|Y)) &= E\left(\sum_{x \in \Omega'_x} (x - T(Y))^2 \cdot P(X = x|Y)\right) \\ &= \sum_{y \in \Omega'_y} \left(\sum_{x \in \Omega'_x} (x - T(y))^2 \cdot P(X = x|Y = y)\right) P(Y = y). \end{aligned}$$

□

Wiener-Filter:  $E(X|Y) : \Omega'_y \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$

## II.4.2 Wiener Filter

Satz: Seien  $X : \Omega_x \rightarrow \Omega'_x$  und  $Y : \Omega_y \rightarrow \Omega'_y$  ZVen mit WVen

$$\left(x, P(X = x)\right)_{x \in \Omega'_x} \quad \text{und} \quad \left(y, P(Y = y)\right)_{y \in \Omega'_y},$$

und  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$E((X - E(X|Y))^2|Y = y) \leq E((X - T(Y))^2|Y = y), \quad y \in \Omega'_y.$$

Beweis: Sei  $y \in \Omega'_y$ . Wegen der Linearität des EWs gilt

$$\begin{aligned} E((X - T(Y))^2|Y = y) &= E((X \pm E(X|Y) - T(Y))^2|Y = y) = E((X - E(X|Y))^2|Y = y) \\ &+ E((X - E(X|Y))(E(X|Y) - T(Y))|Y = y) + E((E(X|Y) - T(Y))^2|Y = y) \\ &= E((X - E(X|Y))^2|Y = y) + (E(X|Y = y) - T(y))^2 \geq E((X - E(X|Y))^2|Y = y), \end{aligned}$$

wobei  $(E(X|Y = y) - T(y))$  ist eine Konstante ( oder Matrix) und

$$E(X - E(X|Y)|Y = y) = E(X|Y = y) - E(X|Y = y) = 0. \quad \square$$

## II.4.2 Wiener Filter

Beispiel:  $X \sim N(0, \sigma_x^2)$ ,  $\eta \sim N(0, \sigma^2)$  und  $Y = X + \eta$   
Die Lösung des Problems

$$\min_{T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} E((X - T(Y))^2) = \min_{T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} E((X - T(Y))^2|Y)$$

ist  $T(Y) = E(X|Y)$ . Aus praktischen Gründen soll der Operator  $T$  linear sein, d.h. man löst

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{R}} E((X - \lambda \cdot Y)^2) &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} E((X - \lambda \cdot Y)^2) = 2 \cdot \lambda \cdot E((X - \lambda \cdot Y) \cdot Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow X - \lambda Y \quad \text{und} \quad Y \quad \text{unkorreliert sind} \\ \text{normalverteilt} &\Leftrightarrow X - \lambda Y \quad \text{und} \quad Y \quad \text{stoch. unabhängig sind} \\ E(X) = E(Y) = 0 &\Leftrightarrow E(X|Y) = E(X - \lambda Y|Y) + \lambda Y = \lambda Y \end{aligned}$$

Also, unter der Annahme, dass  $X$  und  $\eta$  unkorreliert sind, gilt

$$0 = E((X - \lambda \cdot Y) \cdot Y) = E(X \cdot Y) - \lambda E(Y \cdot Y) = E(X^2) - \lambda E(X^2) - \lambda E(\eta^2).$$

Damit  $\lambda = \sigma_x^2 / (\sigma_x^2 + \sigma^2)$  und der Wiener-Filter  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$T(y) = E(E|Y = y) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma^2} \cdot y.$$

## II.4.2 Wiener Filter



Originalbild  $B$

Gauss-Filter( $B$ ) +  $\eta$

Näherung an  $B$

Nachteil: Funktioniert nur für  $H = \text{Blur}$