

Mathematische Methoden der Bildverarbeitung

Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr.(USA) Maria Charina



Aufgaben der Bildverarbeitung:

- Komprimierung (compression);



Originalbild, 30Kbt



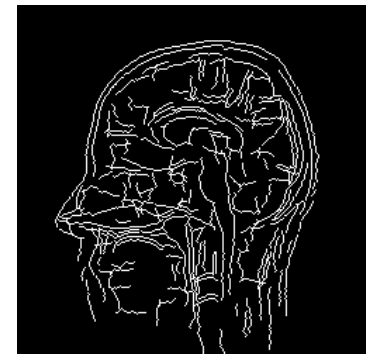
Komprimiertes Bild, 7Kbt



- Entrauschen (denoising);



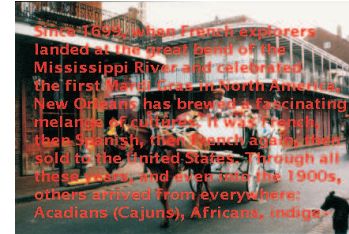
- Mustererkennung (segmentation);



► Restauration (inpainting)



► Restauration (inpainting)



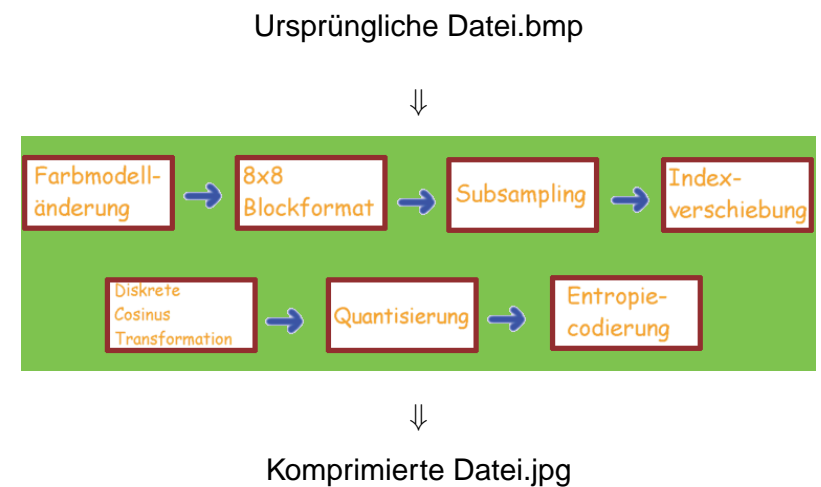
Teil I: Bildkompression mit JPEG und JPEG2000

JPEG (Joint Photographic Experts Group) wurde 1992 entwickelt und hat sich im Internet als Bildstandard durchgesetzt.

Schwerpunkte:

- hohe Kompressionsrate;
- hohe Geschwindigkeit zum Kodieren und Dekodieren.

Ablauf der JPEG-Kompression:



1. Bild Darstellungen

1.1 Motivation

Kriterium für die Qualität eines Bildes ist die menschliche Wahrnehmung des Bildes (menschliches Auge).



- ▶ 130 Millionen 'schwarz-weiße' Rezeptoren, 100 Grautöne
- ▶ 6 Millionen 'farbige' Rezeptoren: **rot**, **grün**, **blau**.

1.2 Schwarz-weiße Bilder

Definition: Ein Bild ist eine $N_1 \times N_2$ Matrix $B = (B[i, j])$ mit ganzzahligen Einträgen (Pixeln) $B[i, j] \in \{0, \dots, 255\}$.

8–Bit-Farbtiefe:

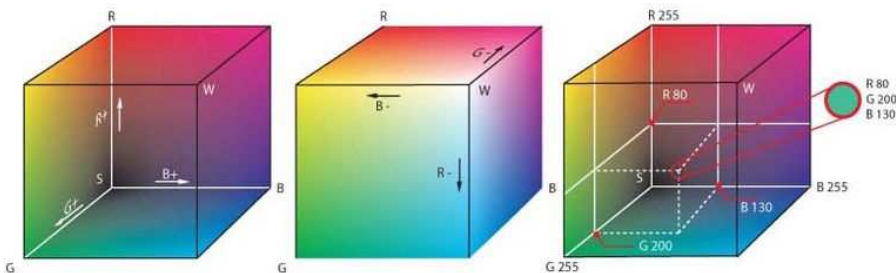
$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow 00000000 \\ \dots \\ 255 \rightarrow 11111111 \end{array}$$

Ein 32×32 Bild benötigt $1024 \cdot 8\text{Bit} = 1\text{kByte}$

1.3 Farbbilder

1.3.1 RGB–Farbraum (Komputermonitoren)

Definition: Ein Bild ist eine $N_1 \times N_2 \times 3$ Matrix $B = (B[i, j, k])$ mit ganzzahligen Einträgen (Pixeln) $B[i, j, k] \in \{0, \dots, 255\}$.



$\text{Pixel}[i, j] = \text{Schwarz} + B[i, j, 1] \cdot \text{Rot} + B[i, j, 2] \cdot \text{Grün} + B[i, j, 3] \cdot \text{Blau}$.

1.3.2 YUV–Farbraum (PAL–System)

Y Luminanz (Helligkeit)

U und V Chrominanz (Farbigkeit)

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.147 & -0.289 & 0.436 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{bmatrix}}_{\text{reguläre Matrix}} \cdot \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{array}{l} 0 \leq Y \leq 255 \\ -111.18 \leq U \leq 111.18 \\ -156.825 \leq V \leq 156.825 \end{array}$$

1.3.3 YCbCr-Farbraum (digitales Fernsehen)

Y Luminanz (Helligkeit)

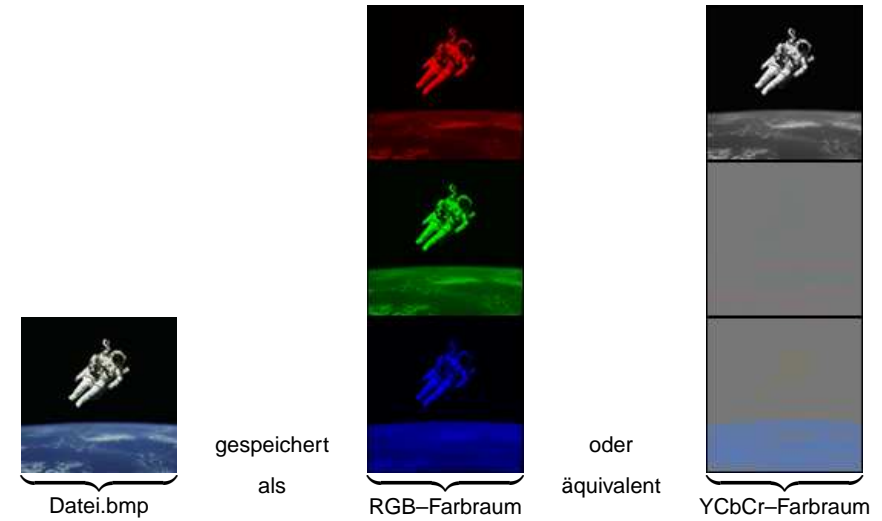
Cb und Cr skalierte Chrominanz (Farbigkeit)

$$\begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.169 & -0.331 & 0.500 \\ 0.500 & -0.419 & -0.081 \end{bmatrix}}_{\text{reguläre Matrix}} \cdot \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

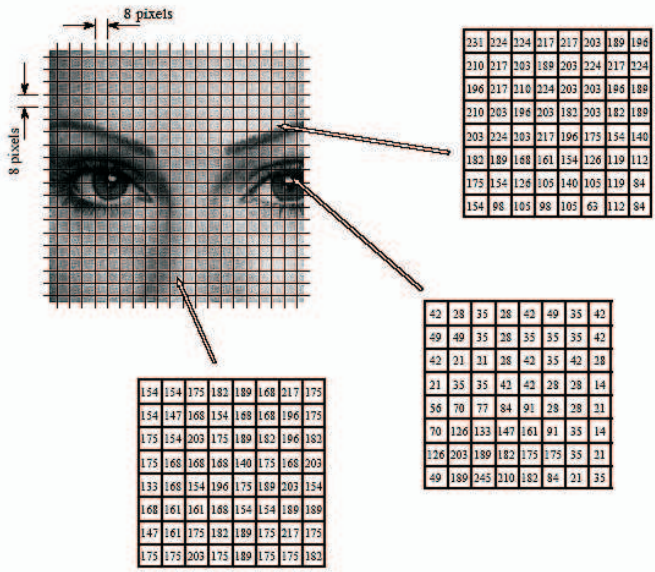
mit

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y \leq 255 \\ -127.5 &\leq Cb \leq 127.5 \\ -127.5 &\leq Cr \leq 127.5 \end{aligned}$$

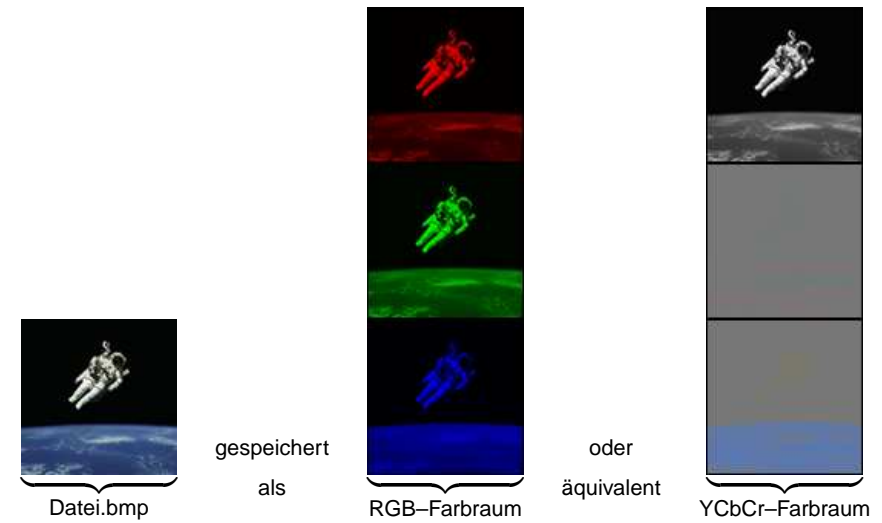
2.1. JPEG: Farbmodelländerung



2.2. JPEG: Blocketeilung



2.3. JPEG: Subsampling



Daten können um einen Faktor 2 reduziert werden (verlustbehaftete Kompression)

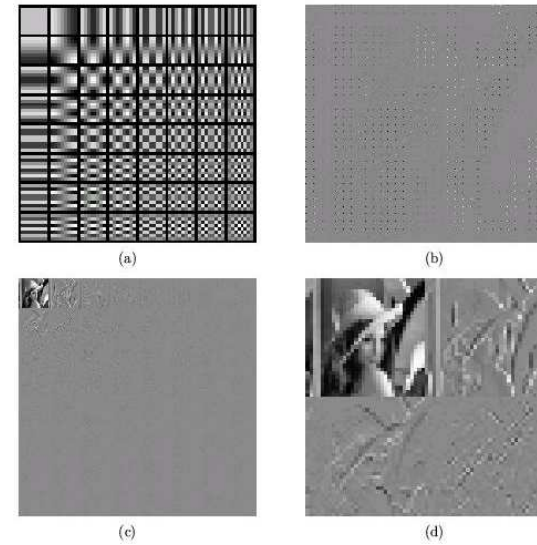
2.4. JPEG: Indexverschiebung

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \mapsto \left[\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 128 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \in \{-128, \dots, 127\}$$

vorzeichenlose Bit \mapsto vorzeichenbehaftete Bit

Verlustbehaftet aber keine Kompression.

2.5. JPEG: 2-dim Diskrete Cosinus Transformation



a) $N \times N$ DCT-Basisbilder; b-d) zusammengeführte $N \times N$ DCT-Blöcke. ($N = 8$)

Beispiel:

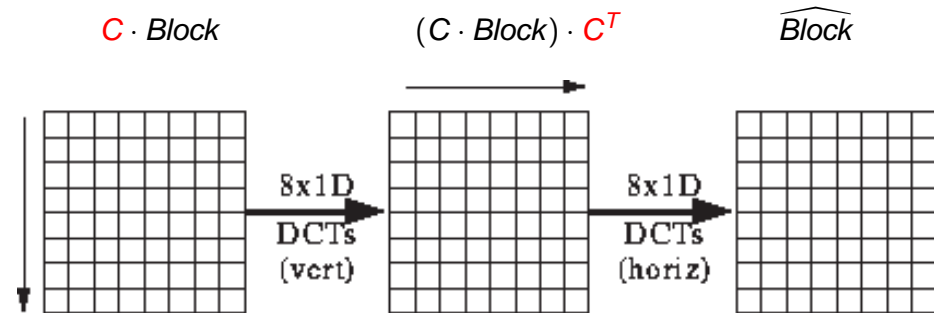
212	212	212	212	212	212	212	212
212	212	212	212	212	212	212	212
75	75	75	75	75	75	75	75
75	75	75	75	75	75	75	75
75	75	75	75	75	75	75	75
75	75	75	75	75	75	75	75
75	75	75	75	75	75	75	75
75	75	75	75	75	75	75	75



nach DCT:

874.000	0	0	0	0	0	0	0
351.000	0	0	0	0	0	0	0
253.143	0	0	0	0	0	0	0
123.297	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-82.384	0	0	0	0	0	0	0
-104.855	0	0	0	0	0	0	0
-69.842	0	0	0	0	0	0	0

2.5. JPEG: 2-dim DCT via 1-dim DCT



Separierbarkeitseigenschaft der 2-dim DCT

2.5.1 JPEG: Eigenschaften der 1-dim DCT:

- (i) 1-dim DCT ist nicht symmetrisch;
- (ii) 1-dim DCT ist eine unitäre Transformation;
- (iii) Rechenaufwand: $O(N^2)$. Kann aber mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation in $O(N \cdot \log N)$ berechnet werden;
- (iv) 1-dim DCT ist eine Rotation in \mathbb{R}^N ;
- (v) 1-dim DCT ist eine der Techniken zur Dekorrelation.

2.5.1 (i) 1-dim DCT ist nicht symmetrisch, denn für $N = 8$ gilt

$$C = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & -d_1 & -c_1 & -b_1 & -a_1 \\ a_2 & b_2 & -b_2 & -a_2 & -a_2 & -b_2 & b_2 & a_2 \\ b_1 & -d_1 & -a_1 & -c_1 & c_1 & a_1 & d_1 & -b_1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ c_1 & -a_1 & d_1 & b_1 & -b_1 & -d_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & -a_2 & a_2 & -b_2 & -b_2 & a_2 & -a_2 & b_2 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & -a_1 & a_1 & -b_1 & c_1 & -d_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{16} & a_2 &= \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{16} \approx 1.307 \\ b_1 &= \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{16} & b_2 &= \sqrt{2} \cos \frac{6\pi}{16} \\ c_1 &= \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{16} & d_1 &= \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{16} \end{aligned}$$

2.5.1 (iii) inverse DCT (IDCT)

Beispiel:

$$DCT: \hat{B} = C \cdot B \cdot C^T = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot C^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$IDCT: B = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ist die Rekonstruktion von B immer möglich?

2.5.1(iii) Sei $N = 2^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$.

$$\hat{x}_F \left[k + j \cdot \frac{N}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\left(F_{\frac{N}{2}} \cdot x_{gerade} \right) [k] + (-1)^j e^{-i2\pi k} \left(F_{\frac{N}{2}} \cdot x_{ungerade} \right) [k] \right)$$

$$j = 0, 1 \quad \text{und} \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Rechenaufwand: $R(N) = 2 \cdot R(N/2) + \underbrace{N}_{\text{Additionen}} + \underbrace{N}_{\text{Multiplikationen}}$

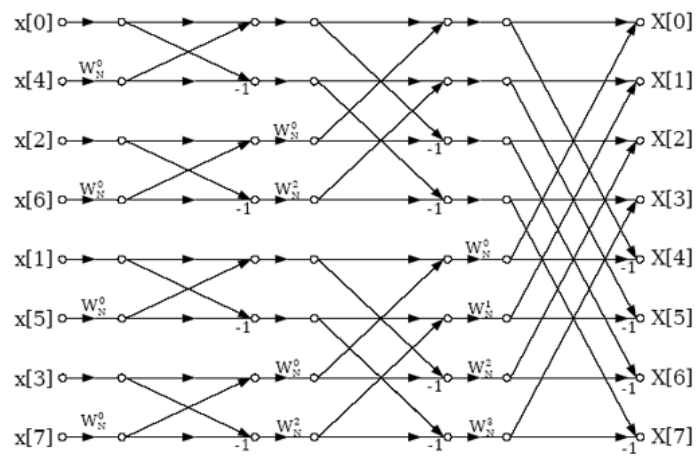
Induktiv:

$$R(N) = 2^m R(2^{\ell-m}) + m \cdot 2^{\ell+1}, \quad m = 1, \dots, \ell.$$

Für $m = \ell$:

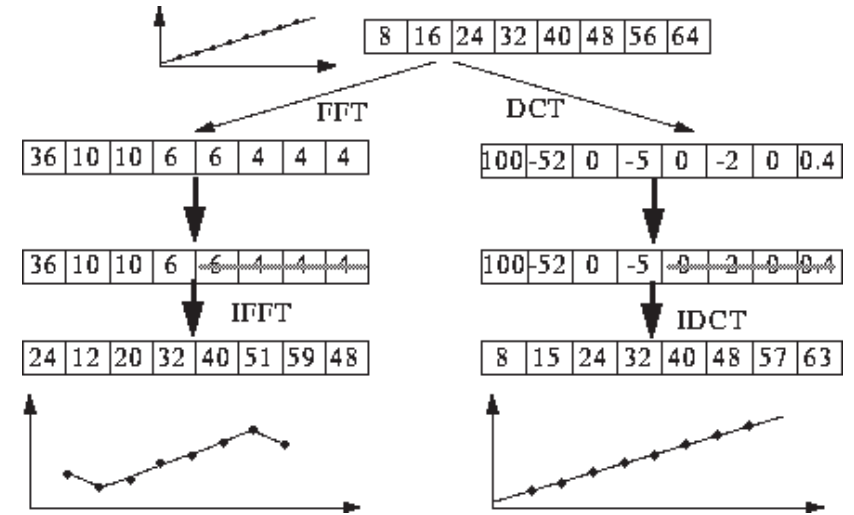
$$R(N) = 2^\ell R(1) + \ell \cdot 2^{\ell+1} = N(R(1) + 2 \log_2 N) = O(N \log_2 N).$$

2.5.1 (iii) schnelle Fourier-Transformation (FFT) für $N = 8$



$$W_N := e^{-\frac{2\pi i}{N}}, \quad k = 0, \dots, 7.$$

2.5.1 (iii) DFT und DCT



Gibbs-Phänomen, Unstetigkeit der periodischen Fortsetzung

2.5.1 (iii) Energieerhaltung

Seien $x \in \mathbb{R}^N$ und $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $A^T A = A A^T = E$. Dann gilt

$$\|A \cdot x\|_2^2 = \|x\|_2^2.$$

Beweis: Sei $y = A \cdot x$.

$$\|A \cdot x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N-1} y^2[k] = y^T \cdot y = x^T A^T A x = \|x\|_2^2.$$

□

Unitäre Transformationen ändern die Länge (Energieinhalt) eines Vektors nicht.

2.5.1 (v) Beispiel (Erwartungswert): 2 Würfel wurden 400 mal zusammen geworfen

		blauer Würfel					
		+	•	••	•••	••••	•••••
grüner Würfel	•	15	9	12	13	12	11
	••	5	8	11	11	9	15
	•••	10	9	14	10	10	17
	••••	12	7	9	7	17	15
	•••••	10	14	7	13	9	14
	••••••	5	12	15	14	11	8

$$\Omega := \{(1, 1); (1, 2); \dots, (6, 6)\}.$$

2.5.1 (v) Beispiel (Erwartungswert): jedem Ereignis wird die Augensumme zugeordnet

Ergebnis	(1 1)	(1 2)	(2 1)	(1 3)	(2 2)	(3 1)	...	(5 6)	(6 5)	(6 6)
$X(e_i) = x_i$	2	3	3	4	4	4	...	11	11	12

Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} =: \Omega'$.

2.5.1 (v) Beispiel (Erwartungswert):

Augensumme	zugehöriges Ergebnis	abs. H	rel. h	$P(X)$
2	(1 1)	15	0,0375	$\frac{1}{36} \approx 0,028$
3	(1 2);(2 1)	14	0,035	$\frac{2}{36} \approx 0,056$
4	(1 3);(2 2);(3 1)	30	0,075	$\frac{3}{36} \approx 0,083$
5	(1 4);(2 3);(3 2);(4 1)	45	0,1125	$\frac{4}{36} \approx 0,111$
6	(1 5);(2 4);(3 3);(4 2);(5 1)	54	0,135	$\frac{5}{36} \approx 0,139$
7	(1 6);(2 5);(3 4);(4 3);(5 2);(6 1)	58	0,145	$\frac{6}{36} \approx 0,167$
8	(2 6);(3 5);(4 4);(5 3);(6 2)	51	0,1275	$\frac{5}{36} \approx 0,139$
9	(3 6);(4 5);(5 4);(6 3)	62	0,155	$\frac{4}{36} \approx 0,111$
10	(4 6);(5 5);(6 4)	38	0,095	$\frac{3}{36} \approx 0,083$
11	(5 6);(6 5)	25	0,0625	$\frac{2}{36} \approx 0,056$
12	(6 6)	8	0,02	$\frac{1}{36} \approx 0,028$

Mittelwert:

$$\bar{x} = \sum_{x \in \Omega'} x \cdot \text{relative Häufigkeit}(x) = 7.61$$

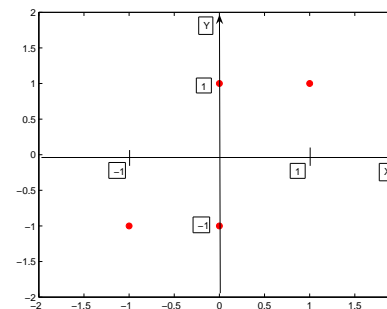
2.5.1 (v) Beispiel (Erwartungswert):

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$3 \cdot \frac{2}{36} = \frac{6}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$4 \cdot \frac{3}{36} = \frac{12}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	$5 \cdot \frac{4}{36} = \frac{20}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	$6 \cdot \frac{5}{36} = \frac{30}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	$7 \cdot \frac{6}{36} = \frac{42}{36}$
8	$\frac{5}{36}$	$8 \cdot \frac{5}{36} = \frac{40}{36}$
9	$\frac{4}{36}$	$9 \cdot \frac{4}{36} = \frac{36}{36}$
10	$\frac{3}{36}$	$10 \cdot \frac{3}{36} = \frac{30}{36}$
11	$\frac{2}{36}$	$11 \cdot \frac{2}{36} = \frac{22}{36}$
12	$\frac{1}{36}$	$12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$
Erwartungswert $E(X)$		$\frac{252}{36} = 7$

Erwartungswert $E(X)$ ist die Verallgemeinerung des \bar{x} :

$$E(X) = \sum_{x \in \Omega'} x \cdot P(X = x) = 7$$

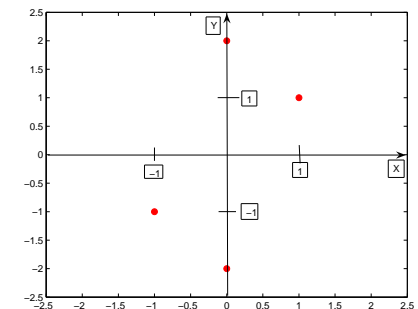
2.5.1 (v) Beispiel (Kovarianz+Korrelationskoeffizient):



Maximale Streuung ist 1

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) = 1/2$$

$$\text{Kor}(X, Y) = 0.707$$

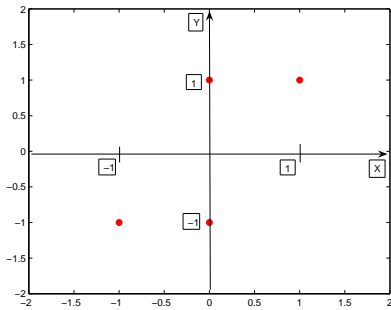


Maximale Streuung ist 4

$$\text{Cov}(X, Y) = 1/2$$

$$\text{Kor}(X, Y) = 0.447$$

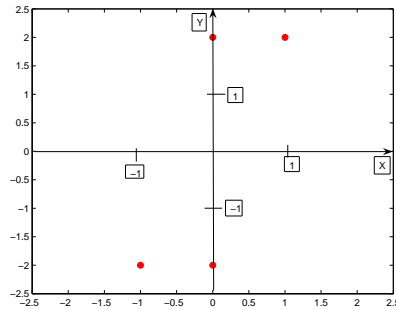
2.5.1 (v) Beispiel (Kovarianz+Korrelationskoeffizient):



Maximale Streuung ist 1

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) = 1/2$$

$$\text{Kor}(X, Y) = 0.707$$



Maximale Streuung ist 4

$$\text{Cov}(X, Y) = 1$$

$$\text{Kor}(X, Y) = 0.707$$

2.5.1.(v) Beispiel ($\text{Cov}(X_1, X_2) = 0 \not\Rightarrow X_1, X_2$ stoch. unabh.)

Gegeben:

- $Y_1, Y_2 : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ stoch. unabh., $P(Y_i = 0) = P(Y_i = 1) = 0.5$
- gemeinsame WV: $P(Y_1 = k, Y_2 = j) = 0.25, k, j = 0, 1$

Dann gilt

$$\text{Cov}(Y_1 + Y_2, Y_1 - Y_2) = 0 \Rightarrow \text{unkorreliert,}$$

aber

$$P(Y_1 + Y_2 = 0, Y_1 - Y_2 = 0) \neq P(Y_1 + Y_2 = 0) \cdot P(Y_1 - Y_2 = 0),$$

d.h. $Y_1 + Y_2$ und $Y_1 - Y_2$ sind nicht stoch. unabh.

2.5.1 (v): Seien X ein $N \times 1$ Markov, stationäres, stoch. Feld und $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ unitär mit $K^T \cdot \text{Cov}(X) \cdot K = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_N])$.

Resultat: Unter allen unitären Transformationen $Y = A^T \cdot X$ verteilt die Karhunen-Loeve-Transformation $Y = K^T \cdot X$ **am meistensten Information auf ersten m Koeffizienten von Y , denn**

$$\max_{A^T \cdot A = E} \sum_{k=0}^{m-1} (A^T \text{Cov}(X) A) [k, k] \Leftrightarrow$$

$$\max_{\substack{A=[a_1, \dots, a_N] \\ a_k^T \cdot a_\ell = 0, k \neq \ell}} \sum_{k=0}^{m-1} (A^T \text{Cov}(X) A) [k, k] \text{ und } a_k^T \cdot a_k = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k^T \text{Cov}(X) a_k + \sum_{k=0}^{m-1} (1 - a_k^T \cdot a_k) \right) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Damit $A = [k_1, \dots, k_m, a_{m+1}, \dots, a_N]$, $K = [k_1, \dots, k_N]$, da

$$\text{Cov}(X) a_k = \lambda_k a_k, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

$m = 1, \dots, N$ ist beliebig $\Rightarrow A = K$.

2.6. JPEG: Quantisierung (verlustbehaftet)

95	88	87	95	88	95	95	95
143	144	151	151	153	170	183	181
153	151	162	166	162	151	126	117
143	144	133	130	143	153	159	175
123	112	116	130	143	147	162	189
133	151	162	166	170	188	166	128
160	168	166	159	135	101	93	98
194	155	153	144	126	106	118	133

Bildmatrix

↓

93	2	-8	-7	3	1	1	-2
-38	-58	11	17	-3	5	5	-3
-84	63	-1	-17	2	7	-4	-0
-51	-37	-10	13	-10	5	-1	-4
-85	-42	50	-8	18	-5	-1	1
-63	66	-13	-1	2	-6	-2	-2
-16	14	-37	18	-12	4	3	-3
-53	31	-7	-10	23	-0	2	2

DCT-Koeffizienten

98	95	91	89	90	95	101	106
140	143	149	156	163	167	168	167
146	149	154	159	159	151	137	126
149	142	136	137	145	156	163	166
119	117	118	125	140	157	170	176
137	147	160	170	172	166	157	150
166	167	164	152	132	112	99	93
151	153	150	139	125	118	119	123

rekonstruierte Bildmatrix

↑

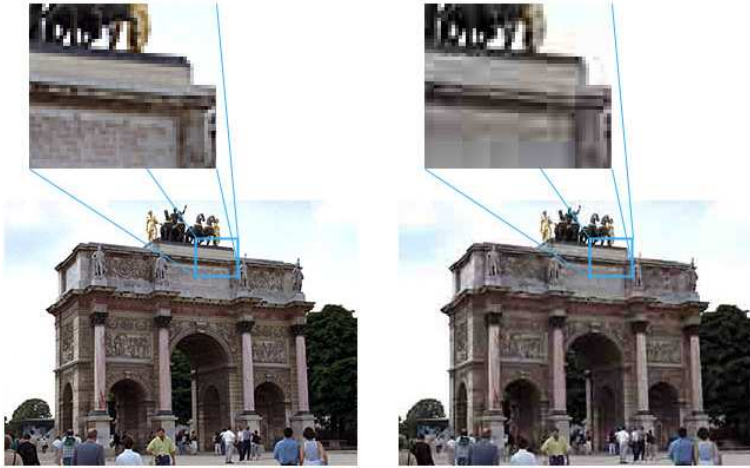
31	0	-1	0	0	0	0	0
-7	-8	1	1	0	0	0	0
-12	7	0	-1	0	0	0	0
-5	-3	0	0	0	0	0	0
-7	-3	3	0	0	0	0	0
-4	4	0	0	0	0	0	0
-1	0	-1	0	0	0	0	0
-3	1	0	0	0	0	0	0

quantisierte DCT-Koeffizienten

3	5	7	9	11	13	15	17
5	7	9	11	13	15	17	19
7	9	11	13	15	17	19	21
9	11	13	15	17	19	21	23
11	13	15	17	19	21	23	25
13	15	17	19	21	23	25	27
15	17	19	21	23	25	27	29
17	19	21	23	25	27	29	31

2.6. JPEG: Quantisierung

$$DCT_{\text{quantisierte}}[i, j] = \text{sgn}(DCT[i, j]) \cdot \left\lfloor \frac{|DCT[i, j]|}{Q[i, j]} \right\rfloor, \quad 0 \leq i, j \leq 7.$$



2.6. JPEG: Quantisierung

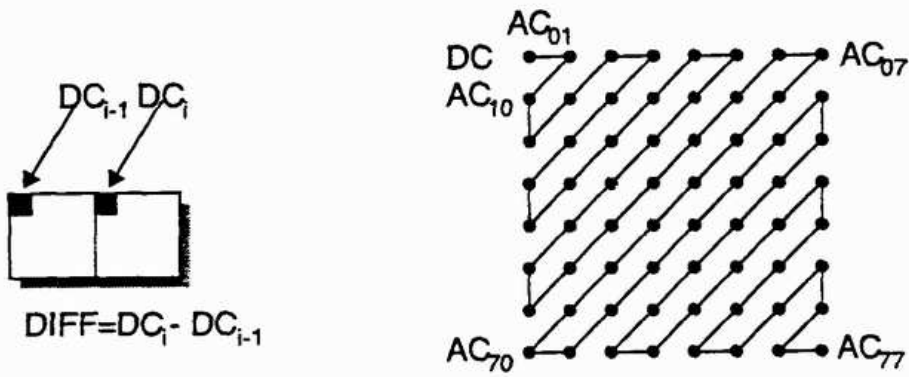


Qualitätsstufen nehmen von links nach rechts ab



2.6. JPEG: Quantisierung

Zig-Zag-Scan von DCT-Koeffizienten



2.7. JPEG: Kodierung

Beispiel (Code mit fester Bitbreite vs. Huffman-Code):

	3-Bitbreite	Länge	Huffman	Länge
A	001	3	0	1
B	010	3	100	3
C	011	3	101	3
D	100	3	110	3
E	101	3	111	3

Seien

$$X_f : \{A, B, C, D, E\} \rightarrow \{3\} \quad X_H : \{A, B, C, D, E\} \rightarrow \{1, 3\}$$

mit $P(X_H = 1) = 1/5$ und $P(X_H = 3) = 4/5$. Dann gilt

$$E(X_f) = 3, \quad E(X_H) = 2.6$$

Mit $P(X_H = 1) = 15/39$ und $P(X_H = 3) = 24/39$ gilt

$$E(X_f) = 3, \quad E(X_H) \approx 2.23$$



2.7. JPEG: Kodierung

Beispiel (Code mit fester Bitbreite vs. Huffman-Code):

	3-Bitbreite	Länge	Huffman	Länge
A	001	3	0	1
B	010	3	100	3
C	011	3	101	3
D	100	3	110	3
E	101	3	111	3

Gesendete Teilnachricht

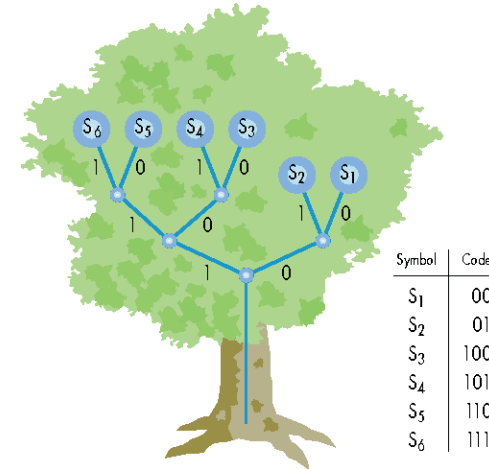
011111... → AE?

Huffman-Code ist präfixfrei ⇒ unmittelbar decodierbar



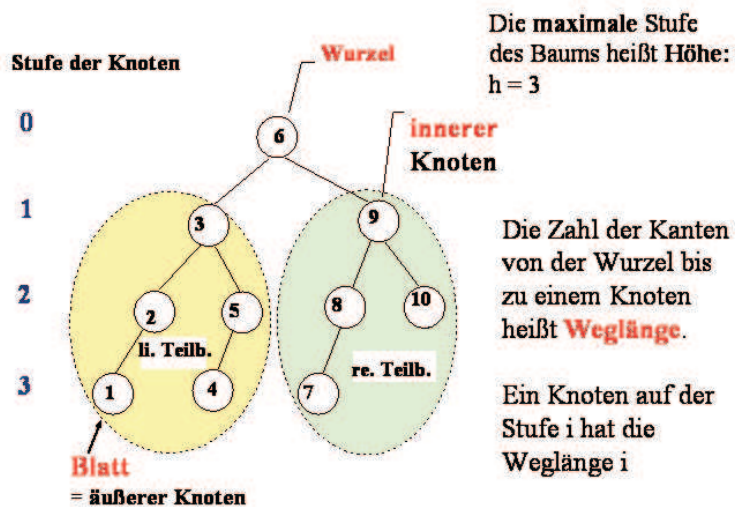
2.7. JPEG: Kodierung

Binärbaum:



2.7. JPEG: Kodierung

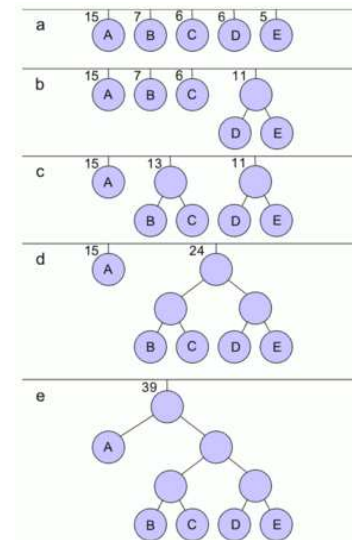
Binärbaum



2.7. JPEG: Kodierung

Konstruktion eines Huffman-Baums für

Zeichen	A	B	C	D	E
Häufigkeit	15	7	6	6	5



Huffman–Baum pflanzen:

1. Erzeuge eine nach Wahrscheinlichkeiten sortierte Liste von Bäumen mit jeweils nur einem Knoten (Symbol und seine Wahrscheinlichkeit).
2. Entferne die letzten beiden Bäume und hänge sie unter eine gemeinsame Wurzel, die die Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Kinder speichert. Sortiere die Liste von Bäumen um.
3. Wiederhole Schritt 2., bis nur ein Baum in der Liste enthalten ist. Dieser ist der Huffman–Baum.



Huffman–Code erzeugen:

1. Von der Wurzel ausgehend, für alle eindeutigen Wege, Code:=leerer String
2. wenn ein linker Teilbaum beschriftet wird, schreibe eine 1 hinter den bisherigen Code
3. wenn ein rechter Teilbaum beschriftet wird, schreibe eine 0 hinter den bisherigen Code
4. Wiederhole Schritt 2. oder 3., bis ein Blatt (Symbol) erreicht wird. Schreibe den gefundenen Code in die Codetabelle an die Position des jeweiligen Symbols.



Huffman–Codierung:

1. Erzeuge eine Tabelle mit allen im Originaltext vorhandenen Symbolen und deren Wahrscheinlichkeiten
2. Pflanze den Huffman–Baum und erzeuge daraus eine Codetabelle
3. Durchlaufe den Text und ersetze jedes Symbol mit dem entsprechenden Code

Dekodieren: Codetabelle



Eigenschaften eines Huffman–Codes $C := \{c(s_1), \dots, c(s_n)\}$:

1. Huffman–Code ist präfixfrei
2. Huffman–Baum ist vollständig
3. Seltene Symbole sind tiefer im H–Baum als Häufige
4. Die zwei seltensten Symbole sind Geschwister, d.h.

$$\exists s_i, s_j : P(X = s_i), P(X = s_j) \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} P(X = s_k) \wedge$$
$$c(s_i) = u_1 \dots u_M 0 \wedge$$
$$c(s_j) = u_1 \dots u_M 1, \quad u_k \in \{0, 1\}.$$

5. Huffman–Code ist optimal, falls $P(X = s_j) = 2^{-\ell_j}$, $\ell_j \in \mathbb{N}$.



Arithmetische Codierung:

1. Ausgangsintervall $[0, 1)$
2. Ordne jedem Symbol eines Textes ein Subintervall des Ausgangsintervalls zu, dessen Größe der Wahrscheinlichkeit des Symbols entspricht. Das Subintervall, das dem nächsten Symbol des Textes entspricht, wird zum Ausgangsintervall.
4. Sind noch weitere Symbole zu codieren, dann wiederhole Schritt 2, sonst zum Schritt 5.
5. Der Code ist eine beliebige Zahl aus dem letzten Ausgangsintervall.

Dekodieren: Code und die Anzahl der Textsymbole

3. JPEG versus JPEG2000



Original

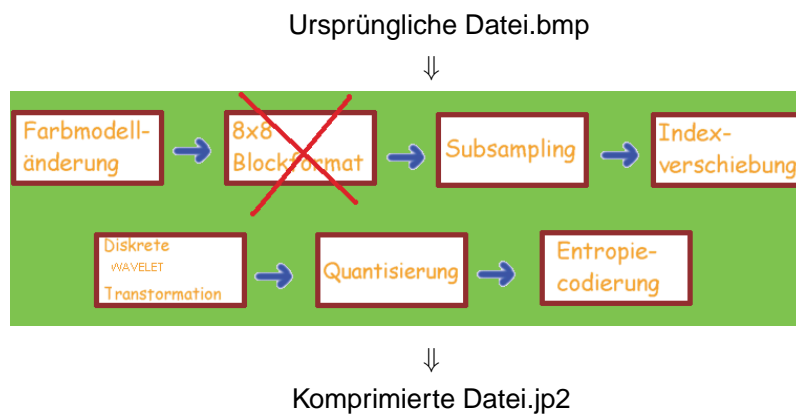
JPEG 19:1

JPEG2000 50:1

$$n : m = \frac{\text{Anzahl der Nullen nach Transformation}}{\text{Anzahl der Nullen nach Quantisierung}}$$

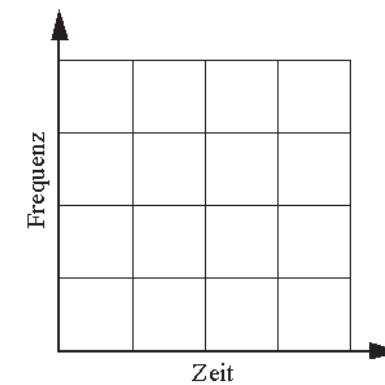
JPEG2000 Vorteile: gute Qualität für Kompressionsraten bis 1 : 65

Ablauf der JPEG2000-Kompression:



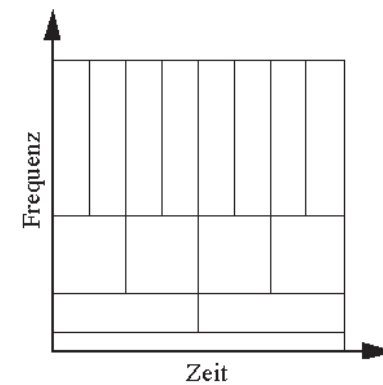
JPEG2000 Vorteile: keine Blockeinteilung \Rightarrow keine Blockartefakte

Zeit-Frequenz-Ebene: Abtastraten, $N = 4$,



DCT

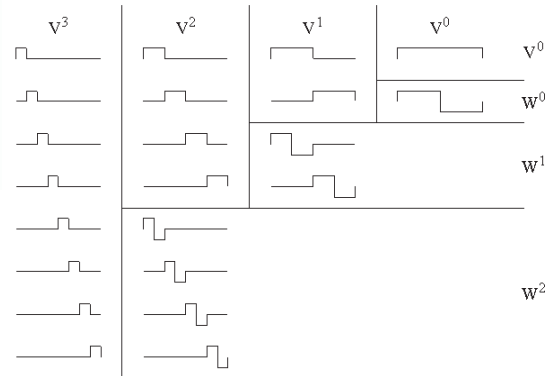
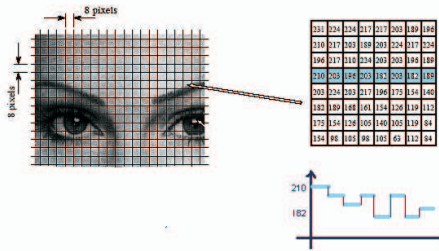
$$\cos \frac{(2k+1)\pi j}{2N}$$



Wavelet-Transformation

$$\sqrt{2^j} \psi(2^j n - kN)$$

1-dim Haar–Transformation, N=8:



1-dim Haar–Transformation, N=8.

Zerlegung $V_3 = V_2 \oplus W_2$ entspricht Matrix–Multiplikation mit

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-dim Haar–Transformation, N=8.

$V_3 = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2$ entspricht Matrix–Multiplikation mit

$$W_2 W_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

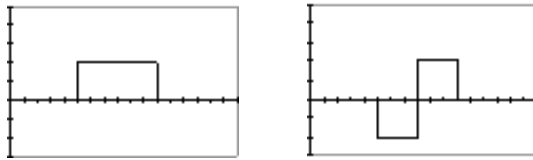
1-dim Haar–Transformation, N=8.

$V_3 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ entspricht Matrix–Multiplikation mit

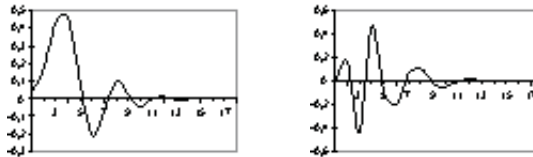
$$W_3 W_2 W_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Wavelet-Arten

Haar

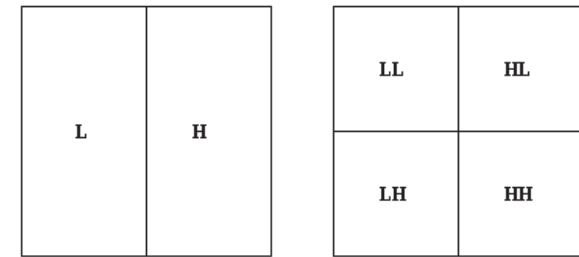


Daubechies



JPEG2000 Vorteile: kompakter Träger \Rightarrow keine Blockeinteilung

2-dim DWT, $N = 2^M$: Teilbänder

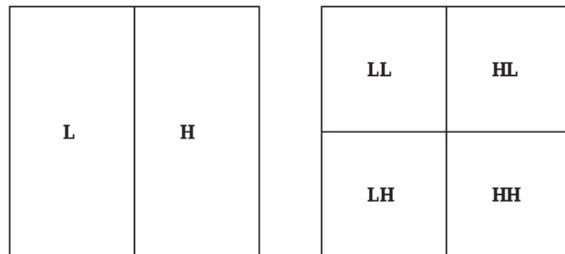


Haar-Transformation, $N = 8$:

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Bild}$$

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \text{Bild}$$

2-dim DWT, $N = 2^M$: Teilbänder

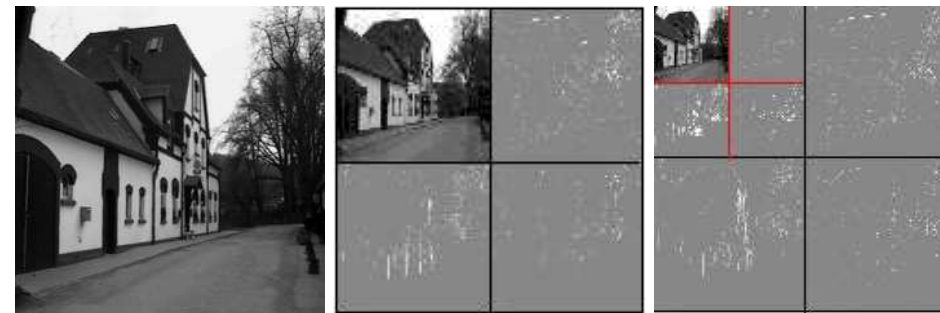


Haar-Transformation, $N = 8$:

$$LL = L \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$LH = L \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2-dim Wavelet-Transformation: iteratives Verfahren

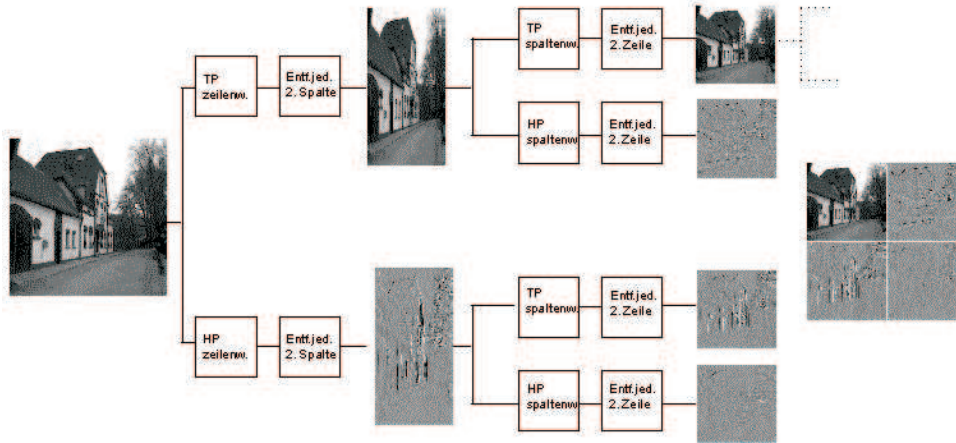


Original

1 Iteration

2 Iteration

2-dim Wavelet-Transformation: schnelle Implementierung



JPEG2000 Vorteile: Rechenaufwand $O(N)$



2-dim DWT: Teilband-Quantisierung und -Codierung

Beispiel: Quantisierungsmatrix, $N = 8$,

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 8 & 34 & 34 & 34 & 34 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 34 & 34 & 34 & 34 \\ 8 & 8 & 12 & 12 & 34 & 34 & 34 & 34 \\ 8 & 8 & 12 & 12 & 34 & 34 & 34 & 34 \\ 34 & 34 & 34 & 34 & 54 & 54 & 54 & 54 \\ 34 & 34 & 34 & 34 & 54 & 54 & 54 & 54 \\ 34 & 34 & 34 & 34 & 54 & 54 & 54 & 54 \\ 34 & 34 & 34 & 34 & 54 & 54 & 54 & 54 \end{pmatrix}$$

Jedes Teilband ist ein Bild, das separat behandelt wird.



2-dim DWT: Teilband-Quantisierung und -Codierung



JPEG2000 Vorteile: Nachladen der Bilddaten



2-dim DWT: Teilband-Quantisierung und -Codierung



JPEG2000 Vorteile: qualitativ hervorgehobene Bildbereiche



