Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

9. Übungsblatt zur Bildverarbeitung
SS 2009 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Hausaufgaben ist Montag, 22.06.09, 12:15 Uhr . Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/bildverarbeitung/`

Aufgabe 1 Am Beispiel der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f = \chi_{[0,1/2)}$, betrachten wir das Funktional

$$J : BV[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 (u-f)^2 + V_0^1(u)$$

der TV-Minimierung. Wir stellen im Folgenden fest, dass für jedes $\lambda > 0$ eine Treppenfunktion der Form

$$u_c(x) = \begin{cases} 1-c, & \text{für } 0 \le x < 1/2, \\ c, & \text{für } 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $J(u_c) < 1$ gilt. Also ist die Lösung des TV-Minimierungsproblems nie die Funktion f selbst.

a) Berechnen Sie für gegebenes $\lambda > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ den Wert $J(u_c)$.

b) Bestimmen Sie anschließend den Wert $c^* = c(\lambda)$, für das $J(u_c)$ minimal ist. Skizzieren Sie das Ergebnis als eine Funktion von λ.

Aufgabe 2 Die Funktionen f, u_c und das Funktional J seien gegeben wie in Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass die Treppenfunktion u_{c^*} mit $c^* = c(\lambda)$ bereits das absolute Minimum von J liefert.