Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

11. Übungsblatt zur Bildverarbeitung
SS 2009 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Hausaufgaben ist Montag, 13.07.09, 12:15 Uhr . Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/bildverarbeitung/`

Aufgabe 1 Die Diffusivitätsfunktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Damit sie eine sinnvolle anisotrope Diffusion

$$\operatorname{div}(g(|\nabla u|)\ \nabla u$$

beschreibt, sollte gelten

$$g(x) \geq 0, \qquad g'(x) \leq 0.$$

(i) Geben Sie äquivalente Bedingungen für die Funktion $\rho : [0, \infty)$ mit $g(x) = \frac{\rho'(x)}{x}$ an.

(ii) Welche zusätzliche Beziehung an g drückt die Konvexität $\rho''(x) \geq 0$ aus?

(iii) Welche der Beziehungen (i) und/oder (ii) erfüllen die vorgeschlagenen 6 Diffusivitätsfunktionen der Vorlesung?

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Diffusionsgleichung

$$u_t - \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\ \nabla u) = 0$$

sich in der Form $u_t - F(\nabla u, D^2 u) = 0$ schreiben lässt, wobei $D^2 u$ die Hessematrix von u und F die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \quad F(p, X) = g(|p|)\ \operatorname{trace}(X) + \frac{g'(|p|)}{|p|}\ p^T X p$$

ist. Hierbei ist trace(X) die Spur (also die Summe der Diagonalelemente) der Matrix X.

Aufgabe 3 Zeigen Sie mit Hilfe der Aufgaben 1 und 2, dass für die Diffusionsgleichung

$$u_t - \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\ \nabla u = 0$$

das Maximumprinzip gilt, falls die zugehörige Funktion ρ des Variationsproblems die Eigenschaften

$$0 \leq x\rho''(x) \leq \rho'(x), \qquad x \geq 0,$$

besitzt.