Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 10.12.2009

Symbolisches Rechnen

9. Übung

Aufgabe 25
Seien $f_1 = x^2 - 3xy + 9y^2 - 2,\ f_2 = 3xy^2 - 2y,\ f_3 = xy - 3y^2$ und $f_4 = 9y^3 - 2x^2 - 2y + 4$.

(i) Zeigen Sie, dass $\{f_1, \ldots, f_4\}$ eine Gröbnerbasis des Ideals $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_4 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung (mit $x > y$) ist.

(ii) Bestimmen Sie eine minimale Gröbnerbasis von $\mathfrak{a}$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung.

5 Punkte

Aufgabe 26
Sei K ein Körper, $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathfrak{a} \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. $K[x_1, \ldots, x_n]$ sei versehen mit der Termordnung $\leq_T$. Zeigen Sie:

(i) Für $\lambda, \mu \in K$ ist $NF(\lambda \cdot f + \mu \cdot g, \mathfrak{a}) = \lambda \cdot NF(f, \mathfrak{a}) + \mu \cdot NF(g, \mathfrak{a})$.

(ii) $NF(f \cdot g, \mathfrak{a}) = NF(f \cdot NF(g, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}))$.

(iii) $NF(NF(f, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}) = NF(f, \mathfrak{a})$.

5 Punkte

Aufgabe 27
Seien $g_1 = x + y + z,\ g_2 = y^2 - 1,\ g_3 = z^3 - 1$ und $\mathfrak{a} = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

(i) Zeigen Sie, dass $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ eine Gröbnerbasis von $\mathfrak{a}$ bezüglich der lexikographischen Termordnung mit $x > y > z$ ist.

(ii) Bestimmen Sie für die folgenden Polynome jeweils die Normalform bezüglich $\mathfrak{a}$:

(a) $f_1 = 2x^2 + 4xy + 2xz - 3y^3z + 4y^2 - yz^3 - yz^2 + 5yz + 3y - 2$,

(b) $f_2 = x^2 - 2xy^3 - 2xy^2z + 3xy + yz^3 - 3yz - z^3 - z^2$.

5 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 17.12.2009 bis 10 Uhr.