

Symbolisch/numerisches Lösen von Gleichungssystemen

Klausuraufgaben mit Lösung

Aufgabe 1: Es seien

$$\begin{aligned}f_1 &:= x^2 + y - 2, \\f_2 &:= x^3 - x, \\f_3 &:= y^2 - 3y + 2.\end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Gröbnerbasis von $\mathfrak{a} := \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ bezüglich der graduiert-lexikographischen Termordnung mit $y <_{al} x$.

Lösung. f_2 ist redundant,

$$f_2 = xf_1 - f_4 \quad \text{mit } f_4 := xy - x.$$

Daher $\mathfrak{a} = \langle f_1, f_3, f_4 \rangle$ und man hat das Schema

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{lt}(f_3) = y^2 & \mathbf{lt}(f_4) = xy \\ \hline \mathbf{lt}(f_1) = x^2 & (x^2y^2)_T & x^2y \\ \mathbf{lt}(f_3) = y^2 & - & xy^2 \end{array}$$

Nach Buchbergers Auswahlkriterium für Paare wählt man erst das Paar (f_3, f_4) (erst (f_1, f_4) ist auch nicht falsch)

$$S(f_3, f_4) = xf_3 - yf_4 = -2f_4 \longrightarrow_{\{f_4\}} 0.$$

Danach

$$S(f_1, f_4) = yf_1 - xf_4 = x^2 + y^2 - 2y \longrightarrow_{\{f_1\}} f_3 \longrightarrow_{\{f_3\}} 0.$$

$\{f_1, f_3, f_4\}$ ist also eine Gröbnerbasis von \mathfrak{a} .

Aufgabe 2: Es sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M .

Lösung. Wegen der Rekursion $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ für $n \geq 1$ und $T_1(x) = xT_0(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{C}$

$$x \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}T_3(x) \end{pmatrix}.$$

Setzt man für x eine Nullstelle von T_3 ein, also $x \in \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, so bekommt man die Eigenvektor- Eigenwertidentität

$$x \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind also $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} T_0(0) \\ T_1(0) \\ T_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{zum Eigenwert } 0,$$

$$\begin{pmatrix} T_0(\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ T_1(\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ T_2(\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{zum Eigenwert } \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{pmatrix} T_0(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ T_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ T_2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{zum Eigenwert } -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 3: Ordnen Sie die drei Terme

$$t_1 = x^2, t_2 := xy^2, t_3 := y^3$$

bezüglich der

- (i) lexikographischen Termordnung
- (ii) graduiert-lexikographischen Termordnung
- (iii) reversegraduiert-lexikographischen Termordnung

mit $y <_{lex} x$.

Lösung.

- (i): $t_3 < t_2 < t_1$,
- (ii): $t_1 < t_3 < t_2$,
- (iii) $t_1 < t_2 < t_3$.

Aufgabe 4: Es sei $\mathcal{P} := \mathbb{Q}[x]$ und $\mathfrak{a} = \langle x^3 - x, x^3 + 2x^2 + x \rangle$. Bestimmen Sie die minimale Gröbnerbasis von \mathfrak{a} .

Lösung. \mathcal{P} ist Euklidischer Ring. Die minimale Gröbnerbasis eines Ideals $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ist hier immer

$$\{g.g.T.(f_1, \dots, f_s)\}.$$

Wegen $f_1 = x(x+1)(x-1)$ und $f_2 = x(x+1)^2$ ist hier also die minimale Gröbnerbasis

$$\{x(x+1)\}.$$

Aufgabe 5: Es sei N eine Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie: Für jedes $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $N(A) \geq \rho(A)$, wobei ρ der Spektralradius von A ist.

Lösung. Sei $\|\cdot\|$ verträglich zur Matrixnorm N , λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor v ($\Rightarrow v \neq 0$). Dann gilt

$$|\lambda| \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq N(A) \|v\|.$$

Wegen $v \neq 0$ also

$$|\lambda| \leq N(A).$$

Das gilt für alle Eigenwerte von A , somit auch

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\} \leq N(A).$$

Aufgabe 6: Es sei $p(x) = x(x+1)(x-1)$.

- (i) Stellen Sie die Viëtaschen Gleichungen auf
- (ii) Dieses Gleichungssystem hat sechs Lösungen. Welche?

Lösung. Ausmultiplizieren gibt $p(x) = x^3 - x$. Die Viëtaschen Gleichungen sind dann also

$$\begin{aligned}x_1x_2x_3 &= 0, \\x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= -1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

Lösung ist $(0, -1, 1)$ und jede Permutation der Nullstellen, insgesamt also die sechs Tripel

$$(0, 1, -1), (0, -1, 1), (1, 0, -1), (1, -1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0).$$

Aufgabe 7:

	wahr	falsch
Das Verfahren von Weierstraß konvergiert bei paarweise verschiedenen Nullstellen lokal quadratisch	(X)	()
Die folgende Formel ist die Iterationsformel zum Newton-Verfahren mit Deflation zum Abspalten der Nullstelle in der Nähe von $\hat{\xi}$: $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{p'(x_n)}{p(x_n)} + \frac{1}{x_n - \hat{\xi}}}$	()	(X)
Das Einzelschrittverfahren konvergiert für die Matrix $M := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	(X)	()
Die Matrix $M := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist nicht positiv definit	(X)	()
Das Sekanten-Verfahren ist ein Quasi-Newton-Verfahren	(X)	()