Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

8. Dezember 2008

Symbolisches / Numerisches Lösen von Gleichungssystemen

9. Übung

Aufgabe 1

Die Menge $G = \{f_1, \ldots, f_6\} \subset \mathcal{P} = \mathbb{Q}[w, z, y, x]$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &= w + z + y + x, \\ f_2 &= z^2 + 2xz + x^2, \\ f_3 &= yz - xz + x^4y^2 + xy - 2x^2, \\ f_4 &= x^4z - z + x^5 - x, \\ f_5 &= x^2y^3 + x^3y^2 - y - x, \\ f_6 &= x^6y^2 - x^2y^2 - x^4 + 1 \end{aligned}$$

ist eine Gröbnerbasis bezüglich der Ordnung $<_{lex}$ mit $x <_{lex} y <_{lex} z <_{lex} w$.

(i) Geben Sie alle Teilmengen von G an, die Gröbnerbasen sind.

(ii) Geben Sie alle Mengen von Leitpolynomen der f_i an, die Gröbnerbasen sind.

3 Punkte

Aufgabe 2

Die Menge $G = \{f_1, \ldots, f_4\} \subset \mathcal{P} = \mathbb{Q}[x, y]$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 1, \\ f_2 &= 4xy^5 - xy, \\ f_3 &= 5x^2y - 4y^7 - 4y^3, \\ f_4 &= 4y^9 + 3y^5 - y \end{aligned}$$

ist eine Gröbnerbasis bezüglich der Ordnung $<_{lex}$ mit $y <_{lex} x$. Berechnen Sie die Varietät $V(\langle G \rangle)$ mit Hilfe von Faktorisierungen der Polynome $f_1, \ldots, f_4$. **6 Punkte**

Aufgabe 3

Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}$ ein nulldimensionales Ideal im Polynomring $\mathcal{P}$ und $f \in \mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$V(\mathfrak{a}) \backslash V(f) = V(\mathfrak{a} : f^*).$$

Hinweis: $\mathfrak{a}$ ist nulldimensional, d.h. $V(\mathfrak{a})$ ist endlich. Damit ist jede Teilmenge von $V(\mathfrak{a})$ Varietät eines Radikals. **6 Punkte**

Abgabe: Montag, den 15.12.2008 bis 12.00 Uhr.