Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl. Math. Katrin Siemko

26. Januar 2009

Symbolisches / Numerisches Lösen von Gleichungssystemen

14. Übung

Aufgabe 1

Es seien

$$\begin{aligned} f_1 &= 3x^2 - x + 4z - 4 \\ f_2 &= y + 2z^2 - 2 \\ f_3 &= z^3 - 2z^2 + z. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die gemeinsamen Nullstellen von f_1, f_2 und f_3. **3 Punkte**

Aufgabe 2

Es seien

$$\begin{aligned} f_1 &= 3x^2 - x + 4z - 4 \\ f_2 &= y + 2z^2 - 2 \\ f_3 &= z^3 - 2z^2 + z. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie gemeinsame Nullstellen von f_1, f_2 und f_3 mit dem multivariaten Newton-Verfahren einmal ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ und einmal ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0, 1, 0)^T$. **4 Punkte**

Aufgabe 3

Gegeben sei eine endliche Varietät $V = \{\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}\}$ mit $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}) \in \mathbb{C}^n$. Es gelte $\xi_n^{(i)} \neq \xi_n^{(j)}$ für $i \neq j$.
Zeigen Sie: Dann hat die minimale lexikographische Gröbnerbasis (mit $x_n < \ldots < x_1$) von $I(V)$ die Gestalt

$$\begin{gathered} x_1 - g_1(x_n) \\ x_2 - g_1(x_n) \\ \vdots \\ x_{n-1} - g_{n-1}(x_n) \\ g_n(x_n) \end{gathered}$$

mit $g_i \in \mathbb{C}[x],\ i = 1, \ldots, n.$
Desweiteren ist $g_j(x_n) = \sum_{i=1}^{m} \xi_j^{(i)} \ell_i(x_n),\ j = 1, \ldots, n-1$ mit $\ell_i(\xi_n^{(i)}) = \delta_{ij},\ \ell_i \in \mathcal{P}_{m-1},\ i = 1, \ldots, m.$ **8 Punkte**

Abgabe: Montag, den 02.02.2009 bis 12.00 Uhr.