Prof. Dr. H. M. Möller SS 2009
Dipl.-Math. Peter Knorr

Übungsblatt 7 - Musterlösung

Aufgabe 1: (4 Punkte)
(i) Berechnen Sie $S(8,6)$.
(ii) Bestimmen Sie den Koeffizienten von wx^4y^3z *in* $(w+x+y+z)^9$.

(i) Die Rekursionsformel für Stirlingzahlen zweiter Art (Satz 5.1.20)

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

gibt die Tabelle (vgl. Skript S. 252)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Hieraus liest man ab

$$S(8,6) = 266.$$

(ii) Nach Satz 5.1.13 ist der Koeffizient von wx^4y^3z in $(w+x+y+z)^9$

$$\binom{9}{1,4,3,1} = \frac{9!}{1!4!3!1!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520.$$

Ohne Verwendung des Satzes 5.1.13 kommt man auch leicht auf das Ergebnis (vgl. Beweis von Satz 5.1.8): Man betrachte

$$(w+x+y+z)^9 = (w+x+y+z)\cdot(w+x+y+z)\cdot\dots\cdot(w+x+y+z).$$

Jedes wx^4y^3z entsteht, indem man aus diesen neun Faktoren genau einmal den Summanden w, viermal x, dreimal y und einmal z auswählt. Für das w gibt es also $\binom{9}{1}$ Möglichkeiten. Für die vier x bleiben acht Faktoren übrig, also $\binom{8}{4}$. Analog $\binom{4}{3}$ für die drei y und $\binom{1}{1}$ für z. Das ergibt $\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1} = 9\cdot 70\cdot 4\cdot 1 = 2520$ Möglichkeiten.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ *eine aufsteigend geordnete Folge paarweise verschiedener natürlicher Zahlen* ≤ 100*. Betrachten Sie alle Differenzen* $a_i - a_j$*,* $1 \leq j < i \leq 21$*. Beweisen Sie, dass hierbei ein Wert mindestens dreimal vorkommt!*

Bemerkung: Auf dem Zettel war nicht erwähnt, dass es sich um natürliche Zahlen handeln soll. Ohne diese Einschränkung hätte diese Aufgabe keinen Sinn.

Für $a_1, a_2 \ldots a_{21}$ kommen nur Zahlen der Menge $\{1 \ldots 100\}$ in Frage. Aus jedem Paar dieser Zahlen werden Differenzen gebildet, die zur Menge $\{1 \ldots 99\}$ gehören müssen. Die Anzahl dieser Differenzen ist $\binom{21}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$.

Angenommen, keine dieser Differenzen käme öfter als zweimal vor. Dann kann man maximal $|\{1 \ldots 99\}| = 99 \cdot 2 = 198$ Differenzen bilden. Schubfachprinzip!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

(i) Eine Reihe im Kino umfasst n Plätze. Auf wie viele Arten lassen sich k Personen in dieser Reihe platzieren, so dass keine zwei Personen direkt nebeneinander sitzen?

(ii) Beim Fußballspiel teilt man die zehn Feldspieler in Verteidiger, Mittelfeldspieler und Stürmer ein. Beispielsweise besteht das 4 - 4 - 2-System aus 4 Verteidigern, 4 Mittelfeldspielern und 2 Stürmern. Wie viele verschiedenen Systeme sind vorstellbar? (10 - 0 - 0 und 0 - 0 - 10 sind besonders interessant!)

(i) Um garantieren zu können, dass einerseits keine zwei Personen nebeneinander sitzen und andererseits der (mindestens eine) Sitz zwischen zwei Personen nicht doppelt gezählt wird, fassen wir eine Person und den leeren Sitz rechts neben ihr als eine Einheit auf. Damit ganz rechts aussen noch jemand sitzen kann, zählen wir den Gang rechts neben der Reihe als Extrasitz, der aber immer frei bleibt. So wird das Problem formal überführt in die Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Personen so auf einer Reihe aus $n+1$ Sitzen zu platzieren, dass jeder einen freien Platz zu seiner Rechten hat?

Die Lösung ist $\binom{n+1-k}{k}$, denn wenn man k Personen beliebig in einer Reihe mit $n-k+1$ freien Sitzen platziert und dann rechts neben jeden besetzten Platz den freien Sitz einfügt, ergibt sich gerade eine Reihe aus $n-k+1+k$ $= n+1$ Sitzen, wobei rechts neben jedem besetzten ein freier Sitz ist. Und es gibt genau $\binom{n+1-k}{k}$ Möglichkeiten, k Personen beliebig in einer Reihe mit $n-k+1$ Sitzen zu platzieren.

(ii) Man stelle sich vor, die Spieler sind in einer Reihe aufgestellt (geordnet nach Position) und zwischen Abwehr- und Mittelfeldspielern sowie zwischen Mittelfeldspielern und Stürmern steht ein Trennungskegel. Stehen die beiden Kegel nebeneinander rechts oder links neben den Spielern, dann haben wir das 0 - 0 - 10 - bzw. das 10 - 0 - 0- System. Stehen die beiden Kegel aber nebeneinander zwischen den Spielern, dann ist das Mittelfeld leer. In jedem anderen Fall sind Verteidigung, Mittelfeld und Sturm mit mindestens einem Spieler besetzt. Um jedes mögliche System für die zehn Feldspieler zu beschreiben, brauchen wir also zwölf Positionen. Zehn für die Spieler, zwei für die Kegel. Jede Verteilung der zwei Kegel auf die zwölf Positionen führt zu einem System und jedes System lässt sich durch eine solche Verteilung beschreiben. Also gibt es so viele Systeme, wie man zwei Kegel auf zwölf Plätze stellen kann. Das sind $\binom{12}{2} = 66$ Systeme.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $M = \{1, 2, \ldots, 1000\}$. Wie viele Zahlen in M sind *nicht* durch 6, 9 oder 10 teilbar?

$|M| = 1000$. Die Menge M_6 der Zahlen ≤ 1000, die durch 6 teilbar sind, ist $\{6, 12, 18 \ldots 990, 996\}$ und umfasst $\frac{996}{6} = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$ Elemente. Analog ist $|M_9| = \lfloor \frac{1000}{9} \rfloor = 111$ und $|M_{10}| = \lfloor \frac{1000}{10} \rfloor = 100$.

Summiert man diese Zahlen auf, dann hat man die Elemente mehrfach gezählt, die in den Schnittmengen auftauchen. Will man nun die Gesamtzahl aller Elemente ermitteln, die durch 6, 9 oder 10 teilbar sind, so muss man (Prinzip vom Ein- und Ausschließen!) die Elemente aus den Schnittmengen wieder abziehen. Wegen $ggT(6, 9) = 18$ ist $M_6 \cap M_9 = M_{18}$, und $|M_{18}| = \lfloor \frac{1000}{18} \rfloor = 55$. Analog ist $|M_6 \cap M_{10}| = |M_{30}| = 33$ und $|M_9 \cap M_{10}| = |M_{90}| = 11$. Damit wurden wiederum die Elemente einmal zuviel abgezogen, die in allein drei Mengen enthalten sind.
$|M_6 \cap M_9 \cap M_{10}| = |M_{90}| = 11$.

Die gesuchte Zahl ist also $1000 - 166 - 111 - 100 + 55 + 33 + 11 - 11 = 711$.