Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Peter Knorr

SS 2009

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 4

Abgabe bis Montag, 18.05.09, 17.00 Uhr
in die Kästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Seien $g(x) := f(x,0)$ und $h(y) := f(0,y)$ und $f_s(x) = f(x, s \cdot x)$, wobei $s > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ in 0 ein Minimum haben.
(ii) Untersuchen Sie f_2 und f_1 auf lokale Extrema und geben Sie zu jedem an, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.
(iii) Beweisen Sie, dass man zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in einer ε-Umgebung von $(0,0)$ findet mit $f(x_1, y_1) > 0, f(x_2, y_2) < 0$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Berechnen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion
$f(x,y) := 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $f(x,y) := x^2 + \frac{y^2}{3} - 1, g(x,y) := 2x^2 - \frac{1}{y}$ und $(x_0, y_0) := (1,1)$.
(i) Berechnen Sie für f und g das lineare Taylorpolynom im Entwicklungspunkt (x_0, y_0).
(ii) Errechnen Sie die Koordinaten x_1 und y_1 der gemeinsamen Nullstelle dieser beiden Taylorpolynome.
(iii) Berechnen Sie entsprechend die linearen Taylorpolynome zu f und g im Entwicklungspunkt (x_1, y_1) und deren gemeinsame Nullstelle (x_2, y_2).

Aufgabe 4: (4 Punkte)

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(i) Berechnen Sie für $n = 2 \ldots 10$ den Wert der Summen

$$O_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big), \qquad U_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$$

.
(ii) Skizzieren Sie die Funktion f. Gegen welchen Wert konvergieren O_n und U_n und warum?