Mathematematik für Informatiker I

Klausur am 10.02.2009

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie das kleinste $n \in \mathbb{N}$ *mit:*
$n \equiv 1 \bmod 32 \wedge n \equiv 4 \bmod 43$.

Lösung:
Methode I: Abzählen:
$1, 33, 65, 97, 129, 161, 193, 225, 257, 289, 321, 353, 385, 417, 449, 481, 513, 545, 577,$
$609, 641, 673, 705, 737, 769, 801, 833, 865, 897, 929, 961, 993, \cdots \equiv 1 \bmod 32$
$4, 47, 90, 133, 176, 219, 262, 305, 348, 391, 434, 477, 520, 563, 606, 649, 692, 735, 778,$
$821, 864, 907, 950, 993, \cdots \equiv 4 \bmod 43$

Methode II: Chinesischer Restesatz!
Es gilt $\mathrm{ggT}(43, 32) = 1$. Rechnung wie in Vorlesung ergibt $M := 43 \cdot 32 = 1376$, $m_1 = \widetilde{m_2} = 43$ und $\widetilde{m_1} = m_2 = 32$. Nach Aufgabenstellung ist $r_1 = 1$, $r_2 = 4$.
Mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus bekommt man

m_1	$\widetilde{m_1}$	
1	0	43
0	1	32
1	-1	11
-2	3	10
3	-4	1

Also $3 \cdot 43 + (-4) \cdot 32 = 1$ und weiter $c_1 := 4 \cdot (-4) \bmod 43$, $c_2 := 1 \cdot 3 \bmod 32$. Dann erfüllt $\tilde{n} := c_1 \cdot \widetilde{m_1} + c_2 \cdot \widetilde{m_2} = -16 \cdot 32 + 3 \cdot 43 = -383$ die beiden Gleichungen der Aufgabe. Das kleinste $n \in \mathbb{N}$ ist dann $n := \tilde{n} + M = -383 + 1376 = 993$.

Aufgabe 2:

Bilden Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

Lösung:
Man bekommt Zeilen-Stufenform, wenn man die erste mit der dritten Zeile vertauscht. Dadurch entsteht die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ mit der Determinante $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) = -24$, abzulesen an der Hauptdiagonale. Durch die Zeilenvertauschung ergibt sich ein negativer Vorfaktor, also ist die gesuchte Determinante 24.

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

erst in $\mathbb{R}$*, dann in* $\mathbb{Z}_5$*.*

Lösung:
Am klügsten ist es, die dritte Zeile nach oben zu setzen. Es ergibt sich folgendes System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-3\cdot I, III-2\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}$ ist dieses System unlösbar, weil die letzte Gleichung $0 = -5$ ergäbe. In $\mathbb{Z}_5$ hingegen liest sich die Matrix in Zeilenstufenform wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $x_3 = \lambda, x_2 = 1 + 4\lambda, x_1 = 2 + 2\lambda$. Lösungsmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\}$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie außerdem eine Basis des Bildes der zugehörigen linearen Abbildung φ_A*.*

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I, III-I} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+2\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A ist also 2, d. h., das Bild von φ_A ist zweidimensional. Da die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ im Bild von φ_A enthalten sind, muss man von ihnen zwei linear unabhängige (in diesem Fall: zwei beliebige) auswählen, um eine Basis des Bildes von φ_A zu erhalten.

Aufgabe 5:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Beweisen Sie, dass es zu A nicht mehr als eine inverse Matrix gibt.

Lösung:
Seien B und C Matrizen, die beide zu A invers sind, also

$$AB = BA = E_n \quad \text{und} \quad AC = CA = E_n.$$

Dann gilt

$$C = E_n C = (BA)C = B(AC) = BE_n = B.$$

Alternativer Beweis:
Wenn A invertierbar ist, hat A insbesondere vollen Rang und jedes Gleichungssystem $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung. Setzt man für b den i-ten Einheitsvektor $e_i, i = 1, \ldots, n$, so bekommt man als Lösung die (eindeutig bestimmte) i-te Spalte der inversen Matrix. Wenn alle Spalten der inversen Matrix eindeutig sind, ist sie selbst auch eindeutig.

Aufgabe 6:

Sei φ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $\varphi\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Lösung:
Schnelle Methode:
Mit etwas Rechnung (lineares Gleichungssystem!) bekommt man

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Bei der langsamen Methode formt man mit Gaußelimination

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

(Achtung: Man schreibt hier die Bilder der Basisvektoren als Zeilenvektoren!) um zu

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 2 & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{7}{4} \end{array}$$

Addition der ersten und letzten Zeile gibt als Lösung

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\2\\\frac{13}{4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-\frac{7}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7:

Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Es gelte $w \sim z \Leftrightarrow |Re(z)| + |Im(z)| = |Re(w)| + |Im(w)|$.

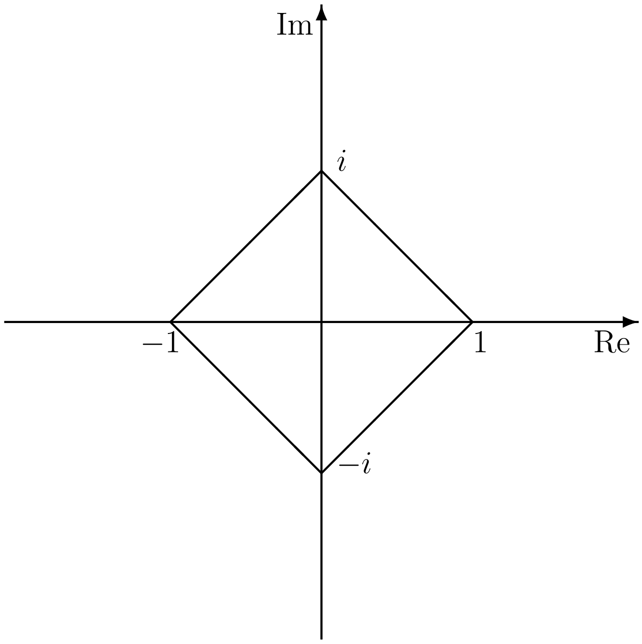
(i) Weisen Sie nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von i.

(iii) Finden Sie ein Repräsentantensystem für $\sim$.

Lösung:
Zu (i): Reflexivität: $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z) = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ ✓
Symmetrie: $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| \Rightarrow |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ ✓
Transitivität: $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| \wedge |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| = |\mathrm{Re}(t)| + |\mathrm{Im}(t)| \Rightarrow |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Re}(t)| + |\mathrm{Im}(t)|$ ✓

Zu (ii): $i = 0 + 1 \cdot i$, also $\mathrm{Re}(i) = 0$, $\mathrm{Im}(i) = 1$. Man sucht also sämtliche Elemente von $\mathbb{C}$, für die gilt $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1$. Man erhält ein Quadrat mit den Ecken $1 = 1 + 0 \cdot i$, $i = 0 + 1 \cdot i$, $-1 = -1 + 0 \cdot i$ und $-i = 0 + (-1) \cdot i$.



Zu (iii): Jede Äquivalenzklasse

$$[z]_\sim := \{w \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| = s\}$$

mit $s = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \geq 0$ enthält genau eine nichtnegative (reelle) Zahl, nämlich $s \in \mathbb{R}$ (wegen $|\mathrm{Re}(s)| + |\mathrm{Im}(s)| = s + 0 = s$). Damit ist die Menge $\{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 0\}$ ein Repräsentantensystem.

Aus ähnlichem Grund ist z.B.

$$\{i \cdot s \mid s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

auch ein Repräsentantensystem. Oder noch allgemeiner: Alle Zahlen auf einem Strahl, der vom Koordinatenursprung ausgeht, bilden ein Repräsentantensystem.

Aufgabe 8:

(i) Beweisen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2, n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{7}{4}$$

Lösung:

Zu (i): m ist hier eine feste Zahl ≥ 2. Vollständige Induktion über n gibt:
IA: $n = m$:

$$\sum_{k=m}^{m} \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{2}{m^2 - 1}$$

$$\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{m+1-(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{2}{m^2-1} \quad \checkmark$$

(Wegen $m \geq 2$ findet keine Division durch 0 statt.)

IS: $n \to n+1$: Es gelte

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n+1} \frac{2}{k^2-1} &= \sum_{k=m}^{n} \frac{2}{k^2-1} + \frac{2}{(n+1)^2-1} \\
&= \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n(n+2)} \\
&= \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} - \frac{n+2}{n(n+2)} + \frac{2}{n(n+2)} \\
&= \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \checkmark
\end{aligned}$$

Zu (ii):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})\right) = 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$$