

Name, Vorname: _____ Matrikel-Nr.: _____

Unterschrift: _____ Platznummer: _____

Klausur zur Mathematik für Informatiker I

4. April 2009

- 1) Bitte benutzen Sie einen schwarzen oder blauen Stift, allerdings **keinen** Bleistift.
- 2) Vervollständigen Sie unbedingt sorgfältig die Angaben am Kopf dieses Titelblatts. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, die Lösung selbständig ohne Hilfe Dritter angefertigt zu haben. Halten Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- 3) Zur Klausur sind keine Hilfsmittel mit Ausnahme von Taschenrechnern zugelassen. Bitte beachten Sie, dass nach der aktuellen Rechtsprechung bereits das Mitführen von Handys u. ä. bereits als Betrugsversuch gewertet wird.
- 4) Erlaubt ist nur ein selbsterstelltes DIN A4-Blatt.
- 5) Schreiben Sie bei jeder Aufgabe Ihre Lösung auf das jeweilige Aufgabenblatt. Sie dürfen auch die Rückseite des Aufgabenblatts benutzen und ggf. die angehängten Zusatzblätter.
- 6) Selbst wenn Sie bei Aufgaben 1–8 die richtige Lösung notiert haben, aber wenn nicht erkennbar ist, wie Sie zu dieser Lösung gekommen sind, dann können wir Ihre Lösung nicht als richtig bewerten.
- 7) Die Klausur ist bestanden, wenn von den 100 erreichbaren 40 Punkte erzielt wurden.
- 8) Die Klausurergebnisse werden am 15.4. am Schwarzen Brett des Lehrgebiets Mathematik VIII im Mathetower, 5. Etage ausgehängt und zeitgleich auf der Homepage zur Vorlesung veröffentlicht.
- 9) Klausureinsicht ist am 16.4., 14–16 Uhr im Raum 540 des Mathetowers.

Bitte hier nichts eintragen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Max. Punkte	8	14	8	14	18	8	16	14	100
Erreicht									

Note: _____

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 1:

Was ist das multiplikative Inverse zu 47 in \mathbb{Z}_{137} ?

8 Punkte

Euklidischer Algorithmus! (**2 Punkte**)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 137 & \\ 0 & 1 & 47 & 2 \\ 1 & -2 & 43 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 10 \\ 11 & -32 & 3 & 1 \\ -12 & 35 & 1 & 1 \end{array} \right| \text{ (korrekt: } \underline{\mathbf{4 P.}})$$

Daraus ergibt sich die Gleichung $-12 \cdot 137 + 35 \cdot 47 = 1$, also $35 \cdot 47 \equiv 1 \pmod{137}$. Also ist 35 das multiplikative Inverse zu 47 in \mathbb{Z}_{137} (2 Punkte).

Test: $35 \cdot 47 - 12 \cdot 137 = 1645 - 1644 = 1 \checkmark$

durchprobiert mit dem richtigen Ergebnis: **8 P.**

durchprobiert, verrechnet und ungeprüft übernommen: **4 P.**

beim Durchprobieren verheddert, ohne Ergebnis: **1 P.**

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\2x_1 + x_2 &= 0\end{aligned}$$

erst in \mathbb{R} , dann in \mathbb{Z}_5 .

14 Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I, III-2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad (\underline{4 \text{ P.}})$$

Daraus ergibt sich in \mathbb{R} die eindeutige Lösung $x_3 = 0, x_2 = 2, x_1 = -1$ (**3 P.**).

In \mathbb{Z}_5 umgewandelt, sieht das Gleichungssystem folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+4II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\underline{3 \text{ P.}})$$

Hier lautet die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad (\underline{4 \text{ P.}})$$

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 3:

Sei \preceq eine Relation auf \mathbb{C} mit

$$w \preceq z \Leftrightarrow |w| < |z| \vee (|w| = |z| \wedge \arg(w) \leq \arg(z))$$

Ist \preceq eine Halbordnung auf \mathbb{C} ?

8 Punkte

Man prüfe die Eigenschaften nach:

- Reflexivität: $z \preceq z$ gilt, weil $|z| = |z| \wedge \arg(z) \leq \arg(z)$ ✓
- Antisymmetrie: Es gelte $(z \preceq w \wedge w \preceq z) \Rightarrow (|z| = |w| \wedge \arg(z) = \arg(w)) \Rightarrow z = w$ ✓
- Transitivität: Es gelte $z \preceq w \wedge w \preceq t$. Dann gibt es folgende vier Möglichkeiten:

(i) $|z| < |w| \wedge |w| < |t| \Rightarrow |z| < |t| \Rightarrow z \preceq t$ ✓

(ii) $|z| = |w| \wedge |w| < |t| \Rightarrow |z| < |t| \Rightarrow z \preceq t$ ✓

(iii) $|z| < |w| \wedge |w| = |t| \Rightarrow |z| < |t| \Rightarrow z \preceq t$ ✓

(iv) $|z| = |w| \wedge |w| = |t|$, wobei dann $\arg(z) \leq \arg(w) \wedge \arg(w) \leq \arg(t)$ gelten muss.
Daraus folgt $|z| = |t| \wedge \arg(z) \leq \arg(t) \Rightarrow z \preceq t$ ✓

Fazit: \preceq ist eine Halbordnung auf \mathbb{C} .

Reflexivität und Antisymmetrie: **Je 2 P.**

Transitivität: **4 P.**

Aufgabe 4:

- (i) Finden Sie w mit $\frac{-w+3}{2w-2i} = i$. Schreiben Sie w hierbei in der Form $a + i \cdot b$.
- (ii) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = -1$.

14 Punkte

$$(i) \frac{-w+3}{2w-2i} = i \Leftrightarrow -w+3 = i \cdot (2w-2i) = 2iw+2 \Leftrightarrow 1 = w \cdot (2i+1) \Leftrightarrow w = \frac{1}{2i+1} = \frac{-2i+1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{-2}{5} \cdot i$$

(Schlussergebnis: **6 P.**, vorletzter Term: **5 P.**, drittletzter Term: **3 P.**)

(ii) Es gilt bekanntlich $|-1| = 1$ und $\arg(-1) = \pi$. Durch die dritte Wurzel ändert sich der Betrag 1 nicht, darum gilt für jede Lösung $|z| = 1$

Das Argument wird bei der dritten Wurzel durch 3 dividiert, also $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$. Weil das Argument von -1 auch durch $3 \cdot \pi, 5 \cdot \pi, 7 \cdot \pi \dots$ ausgedrückt werden könnte, ergeben sich zusätzliche Lösungen mit $\arg(z) = \frac{3\pi}{3} = \pi, \arg(z) = \frac{5\pi}{3}, \arg(z) = \frac{7\pi}{3}$ etc. . Aber weil $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ ist, ergibt sich derselbe Winkel. Darum gibt es genau die drei Lösungen z_1, z_2, z_3 mit $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}, \arg(z_2) = \pi, \arg(z_3) = \frac{5\pi}{3}$, wobei $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Alternativer Ansatz mit kartesischen Koordinaten: Sei z eine Lösung von $z^3 = -1$. Schreibt man $z = a + ib$, dann gilt $z^3 = (a + ib)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3) \cdot i = -1 + 0 \cdot i$, also $(a^3 - 3ab^2) = -1 \wedge (3a^2b - b^3) = 0$. Damit:
 $3a^2b - b^3 = b(3a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee 3a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = \pm\sqrt{3} \cdot a$. Und diese Ergebnisse setzt man in die Gleichung $(a^3 - 3ab^2) = -1$ ein!

Fall 1: $b = 0 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1$ wegen $a \in \mathbb{R}$.

Fall 2: $b = \sqrt{3} \cdot a \Rightarrow a^3 - 9a^3 = -8a^3 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Fall 3: $b = -\sqrt{3} \cdot a \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Die Lösungen lauten also $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, z_2 = -1, z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

(Nur die Lösung -1 : **2 P.**, beide anderen **je 3 P.**)

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 5:

$$V = \mathbb{R}^3, \text{ seien } \mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und}$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ geordnete Basen von } V.$$

Die lineare Abbildung φ_A habe die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich \mathcal{E} . Berechnen Sie $_{\mathcal{B}'}[\varphi_A]_{\mathcal{B}}$.

18 Punkte

Die erforderlichen Transformationsmatrizen sind $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (je 3 P.).

Die Inversion (3 P.) der ersten Matrix liefert $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also muss man folgende Matrixmultiplikation durchführen:

$$_{\mathcal{B}'}[\varphi_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 12 \\ -6 & 4 & -11 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Multiplikation komplett korrekt: 9 P.
mit Rechenfehlern: 8 P.
Ansatz korrekt: 3 P.

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 6:

Sei \mathfrak{M} die Menge der 4×4 -Matrizen folgender Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass \mathfrak{M} mit der Matrixmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

8 Punkte

Gesetze nachprüfen:

Das **Assoziativgesetz** gilt bei Matrixmultiplikationen immer.

Neutrales Element der Multiplikation von 4×4 -Matrizen ist I_4 . Wenn man $a_2 = a_3 = a_4$ setzt, erkennt man sofort, dass $I_4 \in \mathfrak{M}$ ist.

Wie funktioniert nun die Verknüpfung zweier Elemente aus \mathfrak{M} ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 + b_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 + b_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 + b_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deswegen ist die Verknüpfung **kommutativ**: Die Elemente a_n und b_n werden addiert, und die Addition in \mathbb{R} ist bekanntlich kommutativ.

Darum ist das **inverses Element** zu einer gegebenen Matrix A mit $a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ einfach die Matrix B mit den Elementen $-a_2, -a_3, -a_4$.

(Pro Regel 2 P.)

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 7:

$$a_k = k^5 \cdot 5^k, b_k = \frac{k!}{2^{(k^2)}}$$

(i) Prüfen Sie, ob die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergieren.

(ii) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

16 Punkte

(i) Prüfe mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^5 \cdot 5^{k+1}}{k^5 \cdot 5^k} = 5 \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^5 \geq 5 > 1 \Rightarrow \text{Reihe ist divergent.}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)! \cdot 2^{(k^2)}}{k! \cdot 2^{((k+1)^2)}} = \frac{k+1}{2^{2k+1}}$$

Nun benötigt man die (sehr grobe) Abschätzung $2^k \geq 1 + k$, die man durch vollständige Induktion oder die Formel von BERNOULLI gewinnt.

$$\dots \leq \frac{2^k}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{Reihe ist konvergent.}$$

(ii) Nun müssen die Kehrwerte gebildet werden: $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k^5 \cdot 5^k}{(k+1)^5 \cdot 5^{k+1}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^5 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{5}$

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{k! \cdot 2^{((k+1)^2)}}{(k+1)! \cdot 2^{(k^2)}} = \frac{2^{2k+1}}{k+1} = \frac{2}{k+1} \cdot (2^k)^k \geq \frac{2}{k+1} (k+1)^k = 2(k+1)^{k-1} \rightarrow \infty$$

Die Konvergenzradien sind also $\frac{1}{5}$ und ∞ .

(Je Teilergebnis 4 P.)

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 8:

(i) Beweisen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2, n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n}$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{7}{4}$$

14 Punkte

Zu (i) Vollständige Induktion über n :

IA (**4 P.**): $m = n$:

$$\sum_{k=m}^m \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{m^2 - m} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{m - (m-1)}{m(m-1)} = \frac{1}{m(m-1)} \checkmark$$

(Wegen $m \geq 2$ findet keine Division durch 0 statt.)

IS (**4 P.**): $n \rightarrow n+1$: Es gelte

$$\sum_{k=m}^n \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} \frac{1}{k^2 - k} &= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 + n} \\ &= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} + \frac{(n+1) - n}{n^2 + n} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n+1} \checkmark \end{aligned}$$

Name, Vorname:

Platznummer:

Zusatzblatt:

Zu Aufgabe 8(ii):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \checkmark$$

Alles korrekt: **6 P.**

Grundidee, dass man aus der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ Summanden herauszieht und dann abschätzt:
2 P.