Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis

Rolf Walter

Grundbegriffe der Mengenlehre

Inhalt:

Stand: 15.07.2009

Logisches Schließen

Hier geht es um die formale Handhabung von Aussagen.

Von einer **Aussage** muß feststehen, ob sie **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist. w und f sind die sog. **Wahrheitswerte**. (Statt *wahr* sagt man auch **richtig** oder gebraucht andere Wendungen der Umgangssprache, z.B. **gilt, trifft zu** u.ä.)

Operationen für Aussagen A, B, **...:**

- **Verneinung**: **nicht** A (Symbol: $\neg A$)
- **Konjunktion**: A **und** B (Symbol: $A \wedge B$)
- **Disjunktion**: A **oder** B (Symbol: $A \vee B$)
- **Implikation**: aus A **folgt** B (Symbol: $A \implies B$).

Hinweis: Im Großteil der Literatur, so auch hier, werden die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$ *nicht* benutzt. Man verwende stattdessen verbal: „nicht“, „und“, „oder“.

Das Resultat der vier Operationen ist jedesmal eine neue Aussage. Der Wahrheitswert des Resultats ist durch folgende **Wahrheitstabellen** festgelegt:

A	w	f
nicht A	f	w

Negation: „nicht“

$A \backslash B$	w	f
w	w	f
f	f	f

Konjunktion: „und“

$A \backslash B$	w	f
w	w	w
f	w	f

Disjunktion: „oder“

$A \backslash B$	w	f
w	w	f
f	w	w

Implikation: „ $\implies$ “

Die Resultate stehen jeweils in den unteren rechten Blöcken (eingerahmt).

Interpretationen:

- Z.B. ist die Tabelle für die *Disjunktion (oder)* so zu lesen: „*A oder B*“ ist *wahr*, wenn A wahr und B wahr, bzw. A wahr und B falsch, bzw. A falsch und B wahr ist. „*A oder B*“ ist *falsch*, wenn A falsch und B falsch ist. Kurz: „*A oder B*“ ist wahr, wenn zumindest eine der Aussagen A, B wahr ist und nur falsch, wenn beide A, B falsch sind. *Das „oder“ wird also in der Mathematik im einschließenden Sinne gebraucht* (lat.: „vel“).

- Das ausschließende „oder“ der Umgangssprache wird hier durch **entweder - oder** (auch: **entweder - oder aber**) ausgedrückt (lat.: „aut“). Seine Wahrheitstabelle hat im Block links oben statt w den Eintrag f.

- Die *Implikation* „$A \implies B$“ ist laut Tabelle immer wahr, es sei denn, A ist wahr und B ist falsch. Daher genügt es zum Beweis der Implikation, A als wahr vorauszusetzen und *daraus* auf die Wahrheit von B zu schließen.

Jeder mathematische **Satz** hat im Prinzip die Gestalt einer (wahren) Implikation: $A \implies B$. Aus der **Voraussetzung (der Prämisse)** A folgt die **Behauptung (die Konklusion)** B.

Statt „Satz“ sagt man auch **Theorem** (= besonders wichtiger Satz) oder **Lemma** (= Hilfssatz).

Manche Sätze haben die Gestalt $A \iff B$ (**Äquivalenz**). Dann sind zum Beweis zwei Schlußrichtungen durchzuführen: $A \implies B$ *und* $B \implies A$.

Verbale Sprechweisen:

Für $A \implies B$: „aus A **folgt** B“

„B gilt **dann, wenn** A gilt“

„A gilt **nur dann**, wenn B gilt“

„A ist **hinreichend** für B“

„B ist **notwendig** für A“.

Für $A \iff B$: „A gilt **dann und nur dann, wenn** B gilt“

„A ist **notwendig und hinreichend** für B“

„A ist **äquivalent** B“.

Konventionen:
Die Verneinung bei „=“ und ähnlichen Aussagen wird meistens mit Durchstreichen bezeichnet: $a \neq b$ heißt: *nicht* $a = b$.

In Definitionsgleichungen wird statt „=“ geschrieben „:=“ bzw. „=:“, wobei der Doppelpunkt auf der Seite des zu definierenden Objektes steht.

Das „und“ zwischen Aussagen wird oft als Komma geschrieben.

Indirekter Beweis:
Der Beweis eines Satzes „$A \implies B$“ wird manchmal **indirekt** geführt (sog. **Antithese** oder **Widerspruchsbeweis**): Man nimmt unter Voraussetzung der Wahrheit von A an, B sei nicht richtig, und leitet daraus einen Widerspruch zu A (also „nicht A“) ab. Dann muß eben B doch richtig sein. Dies beruht auf dem Grundsatz, daß

$$„A \implies B“ \qquad \textit{logisch gleichwertig} \text{ mit} \qquad „(\text{nicht } B) \implies (\text{nicht } A)“$$

ist. Man beachte die Vertauschung der Reihenfolge hierin! **Logisch gleichwertig** bedeutet dabei, daß die beiden Aussagen stets die gleichen Wahrheitswerte haben, egal wie die von A, B sein mögen.

Eine Variante des Widerspruchsbeweises verläuft so: Man setzt voraus, B sei nicht richtig, A richtig und deduziert daraus einen Widerspruch zu diesen Annahmen (oder zu einer Folgerung aus diesen Annahmen oder zu einer sonstigen als wahr bekannten Aussage).

Verneinungstechnik:
Um indirekte Beweise führen zu können, müssen Verneinungen einwandfrei durchgeführt werden. Bezüglich der Operationen „und“, „oder“ gelten dafür folgende Regeln:

$$\text{nicht } (A \textit{ und } B) \quad \text{logisch gleichwertig mit} \quad (\text{nicht } A) \textit{ oder } (\text{nicht } B)$$
$$\text{nicht } (A \textit{ oder } B) \quad \text{logisch gleichwertig mit} \quad (\text{nicht } A) \textit{ und } (\text{nicht } B).$$

Man beachte hierbei den Rollentausch: „und“ $\longleftrightarrow$ „oder“!

Beispiele: Die korrekte Verneinung von: „dieses Schaf ist schwarz <u>und</u> mager“ lautet: „dieses Schaf ist nicht schwarz <u>oder</u> nicht mager“. Die korrekte Verneinung von: „dieses Schaf ist weiß <u>oder</u> fett“ lautet: „dieses Schaf ist nicht weiß <u>und</u> nicht fett“ (also weder weiß noch fett). Man werfe die Verneinung nicht in einen Topf mit umgangssprachlichen Gegensätzen. Eine *unkorrekte* Verneinung von „diese Kuh ist mager“ wäre: „diese Kuh ist fett“: Mager und fett mögen als Gegensätze empfunden werden, sie sind aber *nicht* die Verneinungen voneinander (schließlich gibt es auch ganz normalgewichtige Kühe).

Mengen

Cantors Definition lautet:
*„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten (Elementen) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“*

Symbole:

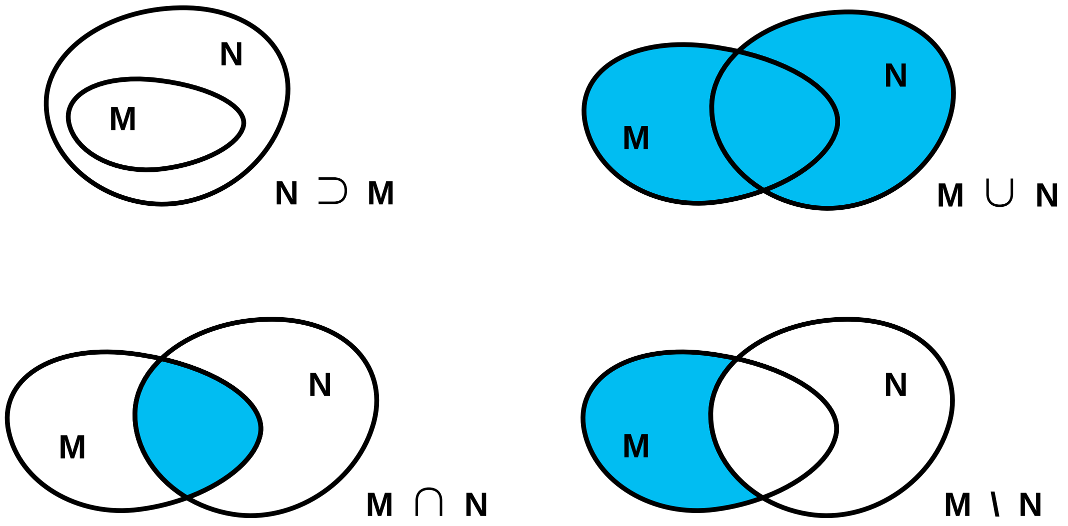
$a \in M$	:	a ist **Element** von M
$\emptyset$	:	**leere Menge** (sie enthält kein Element)
$\{a\}$	:	die Menge mit genau einem Element a **(einelementige Menge)**
$\left.\begin{array}{l} M \subseteq N \\ N \supseteq M \end{array}\right\}$	:	M ist **Teilmenge** von N : für jedes $x \in M$ ist auch $x \in N$
$M = N$	:	$M \subseteq N$ und $N \subseteq M$
$\left.\begin{array}{l} M \subset N \\ N \supset M \end{array}\right\}$	:	M ist **echte Teilmenge** von N ($M \subseteq N, M \neq N$).

Operationen für Mengen $M, N, \ldots$:

- **Durchschnitt**: $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
- **Vereinigung**: $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$
- **Differenz**: $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$.

Ist $M \supseteq N$, so heißt $M \setminus N$ auch das **Komplement** von N (in M).

Veranschaulichung durch sog. **Venn-Diagramme**:



Zwei Mengen M, N heißen **punktfremd** oder **disjunkt**, wenn sie kein Element gemeinsam haben, d.h. wenn $M \cap N = \emptyset$. Gilt $P = M \cup N$ und $M \cap N = \emptyset$, so heißt P **disjunkte** Vereinigung, geschrieben $P = M \dot{\cup} N$.

Hinweis: Das „geschweifte Klammersymbol“ $\{x \mid \text{Eigenschaft von } x\}$ bezeichnet die Menge der x, die die hinter „$|$“ genannte Eigenschaft haben, die sog. **Erfüllungsmenge** dieser Eigenschaft. Kommen von vornherein nur x einer Menge P in Frage, so schreibt man vor „$|$“ statt x auch $x \in P$.

Cartesisches Produkt:
Sind M, N Mengen, so ist $M \times N$ die Menge aller **Paare** (a, b) mit $a \in M$ und $b \in N$. Die Paare sind **geordnet** zu verstehen, d.h. $(a, b) = (\widetilde{a}, \widetilde{b})$ bedeutet $a = \widetilde{a}, b = \widetilde{b}$.

Speziell für $M = N$ schreibt man $M \times M =: M^2$.

Potenzmenge:
Ist M eine Menge, so ist ihre **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M einschließlich $\emptyset$ und M selbst.

Aussageform:
Jedem Element x einer Menge M wird eine Aussage $A(x)$ zugeordnet ist (diese kann in Abhängigkeit von x wahr oder falsch sein). Operationen für Aussageformen sind die zwei **Quantoren**

- **für alle** (Symbol: $\forall$)
- **es gibt** (Symbol: $\exists$).

Beide machen aus einer Aussageform eine Aussage, und zwar auf folgende Weise:

Bei „$\forall$“ ist das Ergebnis die Aussage „für alle $x \in M$ gilt $A(x)$“, auch: „für alle $x \in M$: $A(x)$“ oder: „$A(x)$ für alle $x \in M$“. Die resultierende Aussage ist wahr, wenn $A(x)$ für *jedes* $x \in M$ wahr ist.

Bei „$\exists$“ ist das Ergebnis die Aussage „es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$“, auch: „es gibt ein $x \in M$: $A(x)$“. Die resultierende Aussage ist wahr, wenn ein $x \in M$ existiert, so daß $A(x)$ wahr ist.

Hinweise:

• „**es gibt ein**“ oder „**es existiert ein**“ bedeutet in der Mathematik stets soviel wie „es gibt *mindestens* ein“. Wird eine Aussageform exakt durch ein Element erfüllt, so gebraucht man den Ausdruck **genau ein** oder **ein und nur ein** (Symbol: $\exists !$).

• In manchen Darstellungen werden anstelle der Symbole $\forall$ bzw. $\exists$ die Zeichen $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ verwendet, nicht jedoch hier.

Konvention:
Sind $A(x), B(x)$ Aussageformen, so ist

$$A(x) \implies B(x)$$

eine Kurznotation für

$$\forall\, x \in M: \; A(x) \implies B(x).$$

Verneinungstechnik:
Bezüglich der Operationen $\forall$ und $\exists$ gelten folgende Regeln:

$$\begin{array}{lll} \text{nicht}(\forall\, x \in M: \ A(x)) & \text{logisch gleichwertig mit} & \exists\, x \in M: \ (\text{nicht } A(x)) \\ \text{nicht}(\exists\, x \in M: \ A(x)) & \text{logisch gleichwertig mit} & \forall\, x \in M: \ (\text{nicht } A(x)). \end{array}$$

Man beachte hierbei den Rollentausch: $\forall \longleftrightarrow \exists$!

Beispiele: Die Verneinung von „alle Schafe im Stall sind schwarz“ lautet: „es gibt ein Schaf im Stall, das nicht schwarz ist“. (Eine *unkorrekte* Verneinung wäre: „alle Schafe im Stall sind weiß“.) Die Verneinung von „es gibt einen Riesen auf der Welt“ lautet: „alle Leute auf der Welt sind nicht riesig“, d.h. „kein Mensch auf der Welt ist ein Riese“. (Eine *unkorrekte* Verneinung wäre: „alle Leute auf der Welt sind Zwerge“.)

Rechenregeln:
Für Mengen L, M, N gilt stets:

$$\left.\begin{array}{rcl} (L \cap M) \cap N & = & L \cap (M \cap N) \ =: \ L \cap M \cap N \\ (L \cup M) \cup N & = & L \cup (M \cup N) \ =: \ L \cup M \cup N \end{array}\right\} \quad \textbf{(Assoziativgesetze)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} L \cup (M \cap N) & = & (L \cup M) \cap (L \cup N) \\ L \cap (M \cup N) & = & (L \cap M) \cup (L \cap N) \end{array}\right\} \quad \textbf{(Distributivgesetze)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} L \setminus (M \cap N) & = & (L \setminus M) \cup (L \setminus N) \\ L \setminus (M \cup N) & = & (L \setminus M) \cap (L \setminus N). \end{array}\right\} \quad \textbf{(de Morgansche Regeln)}.$$

Bewiesen werden solche Mengengleichungen, indem man zeigt, daß jedes Element der linken Seite auch Element der rechten Seite ist, und ebenso, daß jedes Element der rechten Seite auch Element der linken Seite ist.

Abbildungen

Abbildung $f: M \to N$:
Sie ordnet jedem $x \in M$ genau ein $f(x) \in N$ zu. Man sagt auch **Funktion** statt Abbildung. M heißt **Definitonsmenge**, N heißt **Zielmenge**. Statt $f: M \to N$ sagt man auch, f ist eine Abbildung von M in N.

Symbole:
$f: M \to N$ oder $x \mapsto f(x)$, $x \in M$ oder $(f(x))_{x \in M}$, wobei bei den letzten beiden Formen N nicht spezifiziert ist. Manchmal schreibt man auch: $f(x) =: f_x$ (**Indexschreibweise**). Häufig kombiniert man:

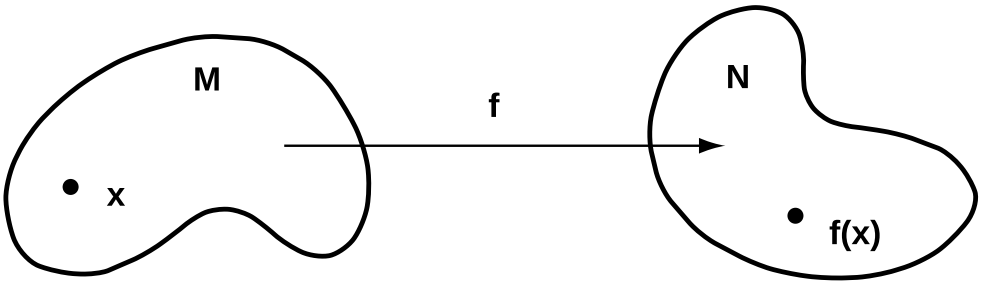
$$\begin{array}{rcl} f: M & \longrightarrow & N \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Selbstabbildung:
Hierbei ist $M = N$. Eine spezielle Selbstabbildung ist die **Identität**

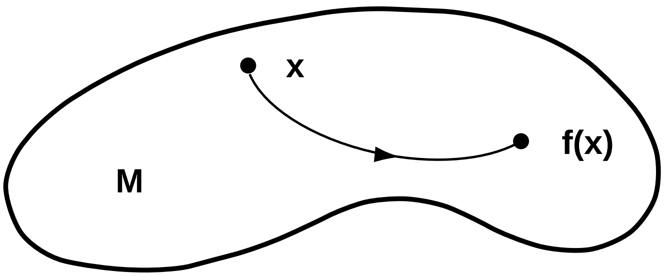
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_M: M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & x. \end{array}$$

Gleichheit:
$f: M \to N$ und $g: K \to L$ sind **gleich**, wenn zumindest $M = K$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt. Kommt es auf die Zielmenge an, so ist auch $N = L$ zu fordern.

Veranschaulichung einer Abbildung $f : M \to N$:



Veranschaulichung einer Selbstabbildung $f : M \to M$:



Sprechweisen:
Für $y = f(x)$ (wobei $x \in M, y \in N$) nennt man y **Wert** oder **Bild** von (unter) f an der **Stelle** oder für das **Argument** x. Man sagt auch: x ist *ein* **Urbild** von y (unter f).

Warnung: $y = f(x) = f(\widetilde{x})$ für $x \neq \widetilde{x}$ ist möglich, d.h. ein y kann mehrere Urbilder besitzen!

Beispiele für Abbildungen:

- Ist c ein Element von N, so heißt die Abbildung $f : M \to N$ mit $f(x) := c$ für alle $x \in M$ eine **konstante Abbildung** (mit Wert c). Dies signalisiert man gelegentlich durch: $f = \text{const}$.

- Ist $M = N$, so ist die Abbildung $f : M \to N$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in M$ die Identität oder **identische Abbildung** (von M), bezeichnet durch id_M (oder nur id).

- Ist $M' \subseteq M$, so heißt die Abbildung von M' in M mit $x' \mapsto x'$ für alle $x' \in M'$ die **Inklusionsabbildung**, bezeichnet durch $M' \hookrightarrow M$.

- Für ein cartesisches Produkt $M \times N$ ist die **erste Projektion** $P_1 : M \times N \to M$ definiert durch $P_1(a, b) := a$ und die **zweite Projektion** $P_2 : M \times N \to N$ durch $P_2(a, b) := b$, jeweils für alle $(a, b) \in M \times N$.

Grundlegende Merkmale für eine Abbildung $f : M \to N$:

- **injektiv**: $f(x) = f(\widetilde{x}) \implies x = \widetilde{x}$ (N unwichtig)

- **surjektiv**: $\forall\, y \in N \;\exists\, x \in M : y = f(x)$ (N wichtig)

- **bijektiv**: $\forall\, y \in N \;\exists|\, x \in M : y = f(x)$ (N wichtig). Der *Name* für dieses x ist $x =: f^{-1}(y)$. „Bijektiv“ ist also dasselbe wie „injektiv und surjektiv“.

Umkehrabbildung:
Zu einer bijektiven Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow N, \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ist die **Umkehrabbildung** definiert:

$$\begin{aligned} f^{-1} : N &\longrightarrow M, \\ y &\longmapsto f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Statt Umkehrabbildung sagt man auch **inverse Abbildung** oder **Inverse**.

Kommentare: *Injektiv* bedeutet, daß verschiedene Argumente $x_1 \neq x_2$ auf verschiedene Bilder $f(x_1) \neq f(x_2)$ abgebildet werden; d.h. es kommt *nicht* vor, daß $x_1 \neq x_2$, aber $f(x_1) = f(x_2)$. *Surjektiv* bedeutet, daß jedes Element y von N als Bild eines $x \in M$ erreicht wird: $y = f(x)$. *Bijektiv* bedeutet, daß f eine „1 : 1-Übersetzung“ von M auf N leistet. f^{-1} leistet dann die „Rückübersetzung“.

Einschränkung von $f : M \to N$ auf $U \subseteq M$:
Dies ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f|U : U &\longrightarrow N \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Umgekehrt nennt man f eine **Fortsetzung** von $f|U$. Statt Einschränkung sagt man auch **Restriktion**.

Bildmengen:
Zu $f : M \to N$ und $U \subseteq M$ ist

$$f(U) := \{y \in N \mid \exists\, x_1 \in M : \; y = f(x_1)\}$$

das **Bild** von U unter f. Man schreibt hierfür auch

$$f(U) =: \{f(x) \mid x \in U\}.$$

Speziell ist

$$f(M) =: \mathrm{Bild}\, f$$

das **Bild** von f. Es gilt $f(M) \subseteq N$; genau für surjektives $f : M \to N$ ist $f(M) = N$.

Urbildmengen:
Zu $f : M \to N$ und $U \subseteq N$ ist

$$f^{-1}(U) := \{x \in M \mid f(x) \in U\}$$

das **Urbild** von U unter f. Ist speziell $U = \{b\}$ *einelementig*, so schreibt man $f^{-1}(\{b\}) =: f^{-1}(b)$. Dieses Urbild ist also i.allg. eine *Teilmenge* von M. Nur bei *bijektivem* f wird $f^{-1}(b)$ als *Element* von M aufgefaßt. Was gemeint ist, geht jeweils aus dem Zusammenhang hervor.

Das Auffinden des Urbildes einer einelementigen Menge $\{b\} \subseteq N$ ist dasselbe wie das Lösen der **Bestimmungsgleichung**

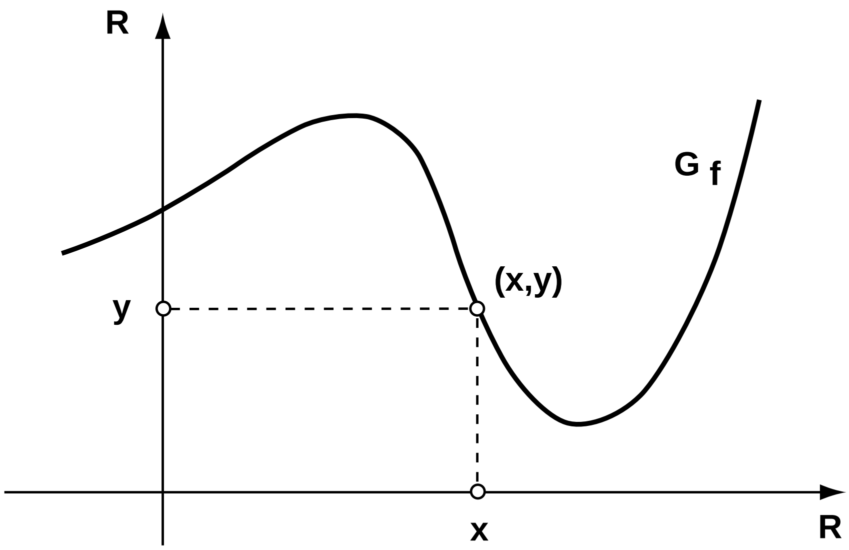
$$f(x) = b.$$

Ein $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = b$ heißt dann auch eine **Lösung** dieser Bestimmungsgleichung oder auch eine **b-Stelle** von f. Die **Lösungsmenge** ist dann $f^{-1}(b)$ ($\neq \emptyset$, falls $b \in \operatorname{Bild} f$).

Graph von $f : M \to N$:
Das ist die folgende Teilmenge des cartesischen Produkts $M \times N$:

$$G_f := \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}.$$

Der Graph dient oft zur Veranschaulichung der Abbildung f, z.B. in der Standardsituation $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ die Menge der reellen Zahlen):



Rechenregeln:
Gegeben sei eine Abbildung $f : M \to N$.

Für alle Teilmengen $U \subseteq M$ und $V \subseteq M$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(U)) &\supseteq U \\
f(U \cap V) &\subseteq f(U) \cap f(V) \\
f(U \cup V) &= f(U) \cup f(V) \\
f(U \setminus V) &\supseteq f(U) \setminus f(V).
\end{aligned}$$

Für alle Teilmengen $U \subseteq N$ und $V \subseteq N$ gilt dann:

$$\begin{array}{rcl} f(f^{-1}(V)) & \subseteq & V \\ f^{-1}(U \cap V) & = & f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ f^{-1}(U \cup V) & = & f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ f^{-1}(U \setminus V) & = & f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V). \end{array}$$

Bewiesen werden diese Aussagen nach dem gleichen Muster wie oben bei den Rechenregeln für Mengen.

Komposition:
Zu zwei Abbildungen

$$f : M \to N, \quad g : K \to L \quad \text{mit} \quad f(M) \subseteq K.$$

ist diese definiert als

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : M & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Es gilt also $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Kurz: „Wende erst f an, dann g“ (Reihenfolge!).

Rechenregeln:
Für $U \subseteq M$ und $V \subseteq L$ gilt

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)), \qquad (g \circ f)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V)).$$

Sei außer f, g eine dritte Abbildung $h : P \to Q$ gegeben mit $g(f(M)) \subseteq P$. Dann gilt das **Assoziativgesetz**

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f =: h \circ g \circ f.$$

Ist $f : M \to N$ bijektiv, so gilt:

$$(f^{-1})^{-1} = f, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N.$$

Sind $f : M \to N$ und $g : N \to L$ bijektiv, so ist auch $g \circ f : M \to L$ bijektiv und

$$(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Verallgemeinerung auf mehrere Objekte

Die meisten Operationen sind auf mehr als zwei Aussagen bzw. Mengen ausdehnbar, z.B. die logischen Operationen *Konjunktion* und *Disjunktion* und die Mengenoperationen *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *cartesisches Produkt*. Dies wird zunächst für k Objekte beschrieben, wobei k eine natürliche Zahl $2, 3, 4, \ldots$ ist (endlich viele Objekte), dann für beliebig viele.

Bei k gegebenen Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_k$ ist die Verallgemeinerung bzgl. der **Vereinigung** $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ und des **Durchschnitts** $M_1 \cap \cdots \cap M_k$ unmittelbar klar. Bei der Vereinigung einelementiger Mengen hat man die Schreibweise

$$\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_k\} =: \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Dies ist die **aufzählende Beschreibung** endlicher Mengen.

Das **cartesische Produkt** $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$ ist die Menge aller k **-Tupel** $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ mit $a_i \in M_i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Die Wendung „für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$" wird oft auch ausgedrückt durch „für $i = 1, \ldots, k$" (oder hinter Formeln, durch Komma abgetrennt, durch „$i = 1, \ldots, k$").

Die Tupel sind immer **geordnet** zu verstehen, d.h. $(a_1, \ldots, a_k) = (b_1, \ldots, b_k)$ bedeutet $a_i = b_i,\ i = 1, \ldots, k$.

k-Tupel heißen bei $k = 2$ auch **Paare**, bei $k = 3$ **Tripel**, bei $k = 4$ **Quadrupel**.

Schreibweise bei $M_1 = \cdots = M_k =: M$: $M \times \cdots \times M =: M^k$.

Warnung: $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ist etwas ganz anderes als $(a_1, \ldots, a_k)$!

Eine **Funktion von mehreren (k) Veränderlichen** ist eine Abbildung, deren Definitionsmenge ein cartesisches Produkt ist: $f : M_1 \times \ldots \times M_k \to N$. Statt $f((x_1, \ldots, x_k))$ wird dann $f(x_1, \ldots, x_k)$ geschrieben, und hierbei heißt $x_1, \ldots, x_k$ die **Argumentliste** und x_i das **i-te Argument**.

Beispiele: Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$ fest.

- Die Abbildung $P_i : M_1 \times \ldots \times M_k \to M_i$ mit $P_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$ ist die i-te **Projektion**.

- Bei gegebenen $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$ kann man zur Abbildung $f : M_1 \times \ldots \times M_k \to N$ die Abbildung von M_i in N betrachten, definiert durch $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$; diese nennt man eine **i-te partielle Abbildung**.

Wenn jedem Element j einer Menge J eine Menge N_j zugeordnet ist, so spricht man von der **Mengenfamilie** $(N_j)_{j \in J}$ mit der **Indexmenge** J. Für eine solche sind **Durchschnitt, Vereinigung** und **cartesisches Produkt** definierbar, und zwar gilt für die ersten beiden:

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \in J} N_j &:= \{x \mid x \in N_j \text{ für alle } j \in J\} \\ \bigcup_{j \in J} N_j &:= \{y \mid y \in N_j \text{ für ein } j \in J\}. \end{aligned}$$

Das **cartesische Produkt**

$$\bigtimes_{j \in J} N_j$$

ist definiert als Menge aller Abbildungen

$$f : J \to \bigcup_{j \in J} N_j \qquad \text{mit} \qquad f(j) \in N_j \quad \forall\, j \in J.$$

Spezialfall Mengenpotenz: Ist $N_j = N$ für alle $j \in J$, so schreibt man

$$\bigtimes_{j \in J} N_j = \bigtimes_{j \in J} N =: N^J.$$

Das ist also die Menge aller Abbildungen von J in N.

Spezialfall $J = \{1, \ldots, k\}$**:** Es gilt

$$\bigcap_{j \in \{1,\ldots,k\}} N_j = N_1 \cap \ldots \cap N_k =: \bigcap_{j=1}^{k} N_j,$$

einschließlich der abgewandelten Schreibweise ganz rechts. Dasselbe ist richtig, wenn „$\cap$“ durch „$\cup$“ oder „$\times$“ ersetzt wird.

Die Vereinigung $\bigcup\limits_{j \in J} N_j$ wird **disjunkt** genannt und dann durch $\dot{\bigcup\limits_{j \in J}} N_j$ bezeichnet, wenn $N_j \cap N_{j'} = \emptyset$ für alle $j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ gilt.

Ist M eine Menge und $U \subseteq M$, so heißt eine Mengenfamilie $(N_j)_{j \in J}$ **Überdeckung** von U, wenn $U \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} N_j \subseteq M$.

Eine **Klasseneinteilung** von M ist eine Überdeckung $(N_j)_{j \in J}$ von M selbst mit:

(i) $N_j \neq \emptyset$ für alle $j \in J$;

(ii) $N_j \cap N_{j'} \neq \emptyset \implies N_j = N_{j'}$.

Rechenregeln:
Diese übertragen sich sinngemäß auf den Fall mehrerer Objekte. Z.B. lauten die **Distributivgesetze**:

$$M \cup \left(\bigcap_{j \in J} N_j \right) = \bigcap_{j \in J} (M \cup N_j)$$
$$M \cap \left(\bigcup_{j \in J} N_j \right) = \bigcup_{j \in J} (M \cap N_j)$$

bzw. die **de Morganschen Regeln**:

$$M \setminus \left(\bigcap_{j \in J} N_j \right) = \bigcup_{j \in J} (M \setminus N_j)$$
$$M \setminus \left(\bigcup_{j \in J} N_j \right) = \bigcap_{j \in J} (M \setminus N_j).$$

Relationen

Diese verallgemeinern den Funktionsbegriff: Einem x können mehrere y zugeordnet sein.

Relation:
Gegeben seien zwei Mengen M, N. Eine **Relation** R zwischen M und N ist eine Teilmenge

$$R \subseteq M \times N.$$

Für $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy und sagt: x, y **stehen** in der Relation R (die Reihenfolge ist wichtig!).

Beispiele:

• Sei D die Menge der Damen einer Gesellschaft, H die Menge der Herren. Die Relation W: „einmal miteinander Walzer getanzt haben" besteht aus allen Paaren $(d, h) \in D \times H$, bei denen d und h einmal miteinander Walzer getanzt haben. Zu einem h kann es mehrere d geben mit dWh und ebenso zu d mehrere h mit dWh.

• Ist $f : M \to N$ eine Abbildung, so ist der *Graph* G_f dasselbe wie die Relation $G_f = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$. Hier gehört zu jedem x genau ein y mit $xG_f y$. (Abbildungen könnten auch als Relationen mit dieser Eigenschaft definiert werden.)

• Ist $M = N$, so spricht man von einer **binären** Relation auf M. Z.B. ist die *Gleichheit* in M auffaßbar als die binäre Relation $R := \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$, die sog. **Diagonale**.

Äquivalenzrelation:
Eine **Äquivalenzrelation** auf M ist eine binäre Relation R auf $M \times M$ mit folgenden Eigenschaften:

- **Reflexivität**: $\forall\, x \in M : xRx$
- **Symmetrie**: $xRy \implies yRx$
- **Transitivität**: $xRy,\ yRz \implies xRz$.

Statt xRy schreibt man auch $x \equiv y \pmod R$ und sagt: x ist **kongruent (äquivalent) modulo** R.

Zu jedem $x \in M$ ist die zugehörige **Äquivalenzklasse** definiert:

$$R_x := \{y \in M \mid xRy\};$$

sie besteht aus allen $y \in M$, die mit x in der Relation R stehen. Wegen der Reflexivität gilt immer $x \in R_x$.

Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder disjunkt oder gleich, d.h. aus $R_x \cap R_z \neq \emptyset$ folgt $R_x = R_z$.

Beweis: Aus $y \in R_x \cap R_z$ folgt xRy und zRy, daraus nach der Symmetrie xRy und yRz, also nach der Transitivität xRz. Aus xRz folgt $R_x \subseteq R_z$; denn aus $w \in R_x$ folgt wRx, also $w \in R_z$. Ebenso folgt aus xRz auch $R_z \subseteq R_x$, also insgesamt $R_x = R_z$.

Wegen dieser Eigenschaften bildet die Familie $(R_x)_{x \in M}$ der Äquivalenzklassen eine Klasseneinteilung von M. Jedes $y \in R_x$ (für das dann ja $R_x = R_y$ gilt) heißt ein **Repräsentant** von R_x.

Die Menge aller Äquivalenzklassen wird durch M/R bezeichnet und **Quotientenmenge** von M **modulo** R genannt:

$$M/R := \{R_x \mid x \in M\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_R : M &\longrightarrow M/R \\ x &\longmapsto R_x \end{aligned}$$

heißt die **kanonische Projektion** zu R. Sie ordnet jedem Element $x \in M$ seine Äquivalenzklasse R_x zu.

Wird aus jeder Äquivalenzklasse $U \in M/R$ genau ein Repräsentant x_U ausgewählt, so nennt man die Menge $\{x_U \mid U \in M/R\}$ ein **Repräsentantensystem**.

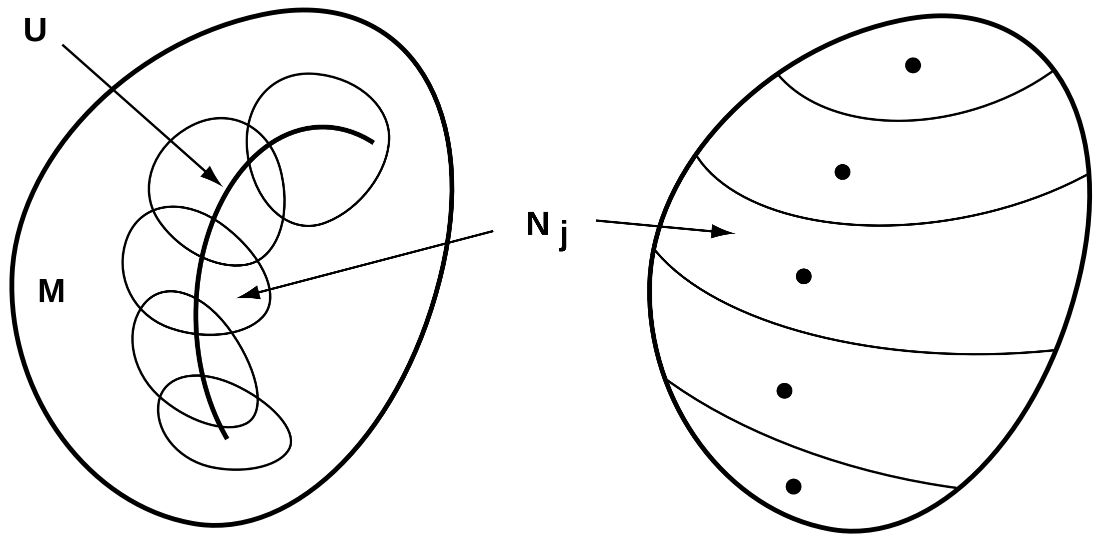
Ist umgekehrt eine Klasseneinteilung $(N_j)_{j \in J}$ von M gegeben, so kann eine binäre Relation R auf M definiert werden durch

$$R := \{(x, y) \in M \times M \mid \exists\, j \in J : x \in N_j,\ y \in N_j\}.$$

Dieses R ist dann eine Äquivalenzrelation auf M, deren Äquivalenzklassen gerade die Mengen der Klasseneinteilung sind. Grob gesprochen ist also eine Äquivalenzrelation auf M dasselbe wie eine Klasseneinteilung von M.

Beispiel: Die einfachste Äquivalenzrelation auf M ist die Gleichheit. Diese ist genau die Äquivalenzrelation auf M, bei der alle Äquivalenzklassen einelementig sind.

Venn-Diagramme:



Überdeckung

Klasseneinteilung und Repräsentantensystem

Standardmengen

Als Symbole werden verwendet:

$\mathbf{N}$	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0)
$\mathbf{Z}$	$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbf{Q}$	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbf{R}$	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{C}$	$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen.

und analog für wichtige Abbildungsmengen:

$\mathbf{GL}$	$\mathbb{GL}$	allgemeine lineare Gruppe
$\mathbf{SL}$	$\mathbb{SL}$	spezielle lineare Gruppe
$\mathbf{L}$	$\mathbb{L}$	Menge linearer Abbildungen
$\mathbf{O}$	$\mathbb{O}$	orthogonale Gruppe
$\mathbf{SO}$	$\mathbb{SO}$	spezielle orthogonale Gruppe.

Die Doppelstrich-Varianten waren ursprünglich für die Handschrift gedacht, die fetten Varianten für den Druck. Neuerdings werden die Doppelstrich-Varianten vielfach auch im Druck verwendet. Es gibt also diesbezüglich keine festen Absprachen. Man kann alternativ $\mathbf{R}$ oder $\mathbb{R}$ usw. gebrauchen, sollte aber im gleichen Kontext bei einer festen Wahl bleiben.

Das Anhängen des Indexes „0“ bedeutet hier Hinzunahme der Null, die Schreibart „\0“ Wegnahme der Null. Z.B. ist $\mathbf{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit 0, $\mathbf{Z} \setminus 0$ die Menge $\mathbf{Z}$ ohne 0. Die Marken „+“ und „−“ bezeichnen entsprechende strikte Vorzeicheneinschränkungen. Z.B. ist $\mathbf{R}^+$ die Menge aller positiven reellen Zahlen, $\mathbf{R}_0^+$ die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.

Anhang: Griechische Buchstaben in der Mathematik

α		alpha	ι		iota	ϱ		rho
β		beta	$\varkappa$		kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ		tau
δ	Δ	delta	μ		my	φ	Φ	phi
ε		epsilon	ν		ny	χ		chi
ζ		zeta	ξ		xi	ψ	Ψ	psi
η		eta	π	Π	pi	ω	Ω	omega
θ		theta						

Statt $\varkappa$ wird auch κ gebraucht. Die Variante ϕ anstelle φ ist stark gefährdet durch die Verwechslung mit der leeren Menge $\emptyset$.