Geburtstagsparadox.
Pseudoprim Zahlen. Carmichael-Zahlen

Aufgabe 1. Sei $n = 365$ die Anzahl der Tage im Jahr und sei $k < n$. Nehmen wir an, daß k zufällig ausgewählte Personen sich in einer Zimmer treffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens 2 von diesen k Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Folgende Punkte werden uns zur Antwort auf diese Frage führen.

(a) Numerieren wir die Personen mit Zahlen $1, 2, \ldots, k$. Sei $G(i)$ der Geburtstag der i-ten Person. Wie groß ist die Anzahl aller möglichen Tupels $(G(1), \ldots, G(k))$?

(b) Wie groß ist die Anzahl aller möglichen Tupels $(G(1), \ldots, G(k))$ mit paarweise verschiedenen $G(i)$?

(c) Sei P_k die Wahrscheinlichkeit, daß alle $G(i)$ verschieden sind. Beweisen Sie, daß gilt

$$P_k \leqslant e^{-\frac{k\cdot(k-1)}{2n}}.$$

Hinweis: benutzen Sie die Ungleichung $1 + x \leqslant e^x$, die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(d) Sei $\overline{P}_k$ die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens 2 von den Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Dann ist es klar, daß $\overline{P}_k = 1 - P_k$ ist. Finden Sie minimale $k = k(n)$ mit $\overline{P}_k \geqslant \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2. (a) Wieviele Paare (a, b) gibt es mit teilfremden a, b aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 10\}$?

(b) Seien d, n natürliche Zahlen. Bezeichnen wir mit $B(d, n)$ die Anzahl der Paare (a, b) mit $\mathrm{ggT}(a, b) = d$ und $1 \leqslant a, b \leqslant n$. Beweisen Sie die Formel:

$$B(d, n) = B(1, [n/d]),$$

$$n^2 = \sum_{d=1}^{n} B(d, n).$$

Berechnen Sie $B(d, 10)$ für $d = 1, 2, \ldots, 10$.

(c) Sei P die Wahrscheinlichkeit, daß zwei zufällig ausgewählte natürliche Zahlen (a, b) teilerfremd sind. Beweisen Sie, daß $P = \frac{6}{\pi^2}$ ist. Dafür benutzen Sie die Formel aus (b) und die Formel $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Definition. Seien n und a natürliche Zahlen. Die Zahl n heißt *pseudoprim zur Basis* a, wenn n zusammengesetzt ist und die Kongruenz

$$a^{n-1} \equiv 1 \,(\bmod\, n)$$

gilt.

Aufgabe 3. Für $n = 15$ finden Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{Z}_{15}^*$, so daß n pseudoprim zur Basis a ist.

Aufgabe 4. Prüfen Sie nach, daß 101101 eine Carmichael-Zahl ist.

Aufgabe 5. Beweisen Sie: Wenn $6k + 1, 12k + 1$ und $18k + 1$ Primzahlen sind, dann ist ihr Produkt eine Carmichael-Zahl.

Aufgabe 6. Finden Sie eine Carmichael-Zahl, die größer als 10^9 ist.