Quadratische Reste

Wir wissen, daß man das Legendre-Symbol $\left(\frac{2}{p}\right)$ mit folgender Formel berechnen kann:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie, daß für jedes ungerade n gilt

$$\frac{n^2-1}{8} = \begin{cases} \text{eine gerade Zahl,} & \text{wenn } n = \pm 1 \pmod 8 \quad \text{ist,} \\ \text{eine ungerade Zahl,} & \text{wenn } n = \pm 5 \pmod 8 \quad \text{ist.} \end{cases}$$

Aufgabe 2. Finden Sie alle positiven quadratischen Reste modulo 163, die kleiner als 17 sind.

Aufgabe 3. Finden Sie die kleinste positive Zahl, die kein quadratischer Rest modulo 61 ist.

Aufgabe 4. Lösen Sie folgende Kongruenzen:

a) $x^2 \equiv 74 \pmod{163}$,

b) $x^2 \equiv 52 \pmod{61}$,

c) $x^2 \equiv 19 \pmod{73}$,

d) $x^2 \equiv 11 \pmod{97}$.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n eine Primzahl p existiert, so daß die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ quadratischen Reste modulo p sind.

Hinweis. Benutzen Sie die Eigenschaften des Legendre-Symbols und folgenden Satz.

Satz (Dirichlet). Für jede nichtnullische Zahl a in der Reihe $1 + ak$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gibt es unendlich viele Primzahlen.