Farey-Reihe

1. Definition. Für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ definieren wir die Farey-Reihe $\mathcal{FAR}_n$.

Die *Farey-Reihe* $\mathcal{FAR}_n$ ist die Menge der gekürzten Brüche zwischen 0 und 1, deren jeweiliger Nenner den Index n nicht übersteigt. Die einzelnen Brüche einer Farey-Reihe sind der Größe nach sortiert.

Beispiel: Die Brüche für $\mathcal{FAR}_6$:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}.$$

Der Größe nach sortiert ergibt sich:

$$\mathcal{FAR}_6: \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Das Sortieren nimmt sehr viel Zeit. Deshalb benutzt man die folgende Methode, mit der man schnell $\mathcal{FAR}_n$ aus $\mathcal{FAR}_{n-1}$ bilden kann. Für jeden der zwei Brüche $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, die in der Reihe $\mathcal{FAR}_{n-1}$ nebeneinander liegen und die Bedingung $b+d=n$ erfüllen, bilden wir einen neuen Bruch $\frac{a+c}{b+d}$. Diesen Bruch stellen wir zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ein.

Beispiel: Bilden wir $\mathcal{FAR}_7$ aus $\mathcal{FAR}_6$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{0}{1}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{5}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{1}{1}. \\
& \wedge & & \wedge & & \wedge & \wedge & & \wedge & & & \wedge & & & \\
& \frac{1}{7} & & \frac{2}{7} & & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & & \frac{5}{7} & & & \frac{6}{7} & & &
\end{array}$$

Also:

$$\mathcal{FAR}_7: \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}.$$

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\mathcal{FAR}_8$.

Aufgabe 2. Für jeden der zwei aufeinander folgenden Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ in der Farey-Reihe $\mathcal{FAR}_n$ gilt die Formel $ad - bc = -1$. Beweisen Sie das per Induktion.

Aufgabe 3^***.** Begründen Sie die zweite Methode, mit der man $\mathcal{FAR}_n$ aus $\mathcal{FAR}_{n-1}$ bilden kann.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß die Mächtigkeit der Farey-Reihe $\mathcal{FAR}_n$ gleich der Mächtigkeit der Vorgängerreihe ist addiert mit der Euler'schen Funktion von n:

$$|\mathcal{FAR}_n| = |\mathcal{FAR}_{n-1}| + \varphi(n).$$

Aufgabe 5^***.** Beweisen Sie mit Hilfe der Farey-Reihe den folgenden Satz:

Satz. Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Dann jede reale Zahl α in der folgenden Form dargetellt sein kann:

$$\alpha = \frac{P}{Q} + \frac{\theta}{Qn}, \quad \text{wobei } 0 < Q \leqslant n,\ (P,Q) = 1,\ |\theta| < 1 \quad \text{ist.}$$