Primzahlverteilung

Definition. *Die Tschebyschow-Funktion* θ ist für alle reellen $x > 0$ mit folgender Formel definiert:

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p.$$

Die Summierung in der Formel läuft über alle Primzahlen $p \leqslant x$.

Es ist bekannt, daß für alle natürlichen $n > 4$ gilt

$$\frac{n}{2} < \theta(n) < (4 \ln 2) n.$$

Diese Ungleichungen kann man ableiten aus den Ungleichungen

$$4^n > \binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen $n \geqslant 1$ gilt

$$\frac{4^n}{1 + \sqrt{n}} \geqslant \binom{2n}{n}.$$

Definition. *Die Funktion* $\pi(x)$ ist für alle reellen $x > 0$ mit folgender Formel definiert:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Die Summierung in der Formel läuft über alle Primzahlen $p \leqslant x$.

Also, $\pi(x)$ ist die Anzahl der Primzahlen, die nicht größer als x sind.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, daß folgende Ungleichungen für alle natürlichen $n \geqslant 4$ gelten.

(a)

$$\pi(n) > \frac{n}{2 \ln n}.$$

(b)

$$\theta(n) \geqslant \ln \sqrt{n} \cdot (\pi(n) - \pi(\sqrt{n}\,)) \geqslant \ln \sqrt{n} \cdot (\pi(n) - \sqrt{n}\,).$$

(c)

$$\pi(n) < (9 \ln 2) \cdot \frac{n}{\ln n}.$$

Aufgabe 3. Sei p_n die n-te Primzahl. Beweisen Sie, daß positive reelle Zahlen c_1, c_2 existieren, so daß gilt

$$c_1 n \ln n < p_n < c_2 n \ln n.$$