Übungszettel 9

Untergruppen der freien Gruppen und ihre Überschneidungen. Präsentationen der Gruppen

Aufgabe 1.
Seien $H_1 = \langle ab, a^2, ba \rangle$ und $H_2 = \langle aba^{-1}, a^2b, a^3, a^2b^{-1} \rangle$ zwei Untergruppen von $F(a,b)$.
1) Finden Sie eine Basis von $H_1 \cap H_2$.
2) Finden Sie den Index von $H_1 \cap H_2$.
3) Ob das Wort $a^2b^7a^{-5}b^6$ in H_2 liegt?

Aufgabe 2. Finden Sie eine Untergruppe des endlichen Indexes in $F(a,b)$, so dass das Wort $ab^2a^{-1}b^{-2}$ nicht in dieser Gruppe liegt.

Aufgabe 3. Sei w ein Wort in $F(X)$ der Länge n. Beweisen Sie, dass es eine Untergruppe H gibt, die einen endlichen Index in $F(X)$ hat und w außer H liegt.

Definition. Ein Kommutator der Elemente x, y ist $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Eine Kommutator–Untergruppe einer Gruppe G ist $G' = \langle [x,y] \mid x, y \in G \rangle$.

Aufgabe 4. Sei $G = F(a,b)$.
a) Finden Sie ein Schreier–Transversal von G' in G.
b) Finden Sie eine Basis von G'.

Aufgabe 5. Definieren wir einen Epimorphismus $\langle a, b \mid a^3, b^3, (ab)^3 \rangle \to \mathbb{Z}_3$ nach der Regel $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$.
a) Finden Sie eine Präsentation von $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 6. Finden Sie eine Präsentation der Gruppe A_4.