

## Algebraische Mengen und Ideale. Divisions Algorithmus

**Aufgabe 1.** Sei  $X = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 1\}$ . Beweisen Sie, dass  $X$  keine algebraische Menge ist.

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie, daß die Sphäre  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  folgende rationale Parameterdarstellung hat:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \\ y &= \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \\ z &= \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}. \end{aligned}$$

**Definition.** Sei  $V \subseteq k^n$  eine Menge. Dann ist die Menge

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } (a_1, \dots, a_n) \in V\}$$

ein Ideal. Das Ideal  $\mathbf{I}(V)$  heißt *Ideal von  $V$* .

**Aufgabe 3.** Sei  $k$  ein Körper, der nur 0 und 1 enthält. Beweisen Sie:

$$\mathbf{I}(k^2) = \langle x^2 - x, y^2 - y \rangle.$$

**Definition.** Seien  $m_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  und  $m_2 = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$  zwei Monome. Wir schreiben  $m_1 \succ_{grlex} m_2$ , wenn gilt

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

oder

$$|\alpha| = |\beta| \text{ und } m_1 \succ_{lex} m_2.$$

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie, dass  $\succ_{grlex}$  eine monomiale Ordnung ist.

**Aufgabe 5.** Finden Sie einen Rest von  $f = x^4 y^2 + x^3 y^2 - y + 1$  modulo  $F = (f_1, f_2) = (xy^2 - x, x - y^2)$  bezüglich der Ordnung  $\succ_{lex}$  und bezüglich der Ordnung  $\succ_{grlex}$ . In beiden Fällen finden Sie Polynome  $q_1$  und  $q_2$ , so dass

$$f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \text{Rest}_F(f)$$

ist.

**Aufgabe 6.** Sei  $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset k[x, y, z]$ , wobei  $g_1 = xy^2 - xz + y$ ,  $g_2 = xy - z^2$ ,  $g_3 = x - yz^4$  ist. Benutzen Sie lexikographische Ordnung und finden Sie ein  $g \in I$ , so dass

$$\text{LM}(g) \notin \langle \text{LM}(g_1), \text{LM}(g_2), \text{LM}(g_3) \rangle$$

ist.