Faktorideale

Aufgabe 1. Sei $I = \langle x^2 - 2,\, y^2 - 3\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ ein Ideal.

(1) Berechnen Sie eine Gröbner Basis dieses Ideals bezüglich der *lex*-Ordnung mit $x \succ\ y$.

(2) Schreiben Sie eine Basis B des Vektorraums $\mathbb{Q}[x, y]/I$ auf.

(3) Für alle $b, b' \in B$ drücken Sie das Produkt bb' als eine Linearkombination von Elementen aus B aus.

(4) Hat das Element $[x + y] \in \mathbb{Q}[x, y]/I$ ein Inverses?

(5) Ist $\mathbb{Q}[x, y]/I$ ein Körper?

(6) Sei $J = \langle x^2 - 2, y^2 - 3\rangle$ ein Ideal in $\mathbb{R}[x, y]$. Ist $\mathbb{R}[x, y]/J$ ein Körper?

Aufgabe 2. Sei $I = \langle x^4y - z^6,\, x^2 - y^3z,\, x^3z^2 - y^3\rangle \subseteq k[x, y, z]$ ein Ideal. Eine Gröbner Basis dieses Ideals bezüglich der *lex*-Ordnung mit $x \succ y \succ z$ ist

$$\{z^{67} - z^6, yz^6 - z^{24}, y^3 - z^{54}, xz^6 - z^{64}, x^2 - z^{55}\}.$$

(1) Schreiben Sie auf eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}[x, y, z]/I$. Berechnen Sie die Dimension dieses Raums.

(2) Finden Sie $\mathbf{V}(I)$. Berechnen Sie die Kapazität von $\mathbf{V}(I)$.