

Pseudoprimeale

Definition 1. Ein Ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ heißt *pseudoprime*, wenn aus $fg \in I$ (wobei $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ ist) folgt $f \in I$ oder $g^m \in I$ für einen $m \in \mathbb{Z}$.

Definition 2. Ein Ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ heißt *irreduzibel*, wenn aus $I = I_1 \cap I_2$ (wobei I_1, I_2 Ideale sind) folgt $I = I_1$ oder $I = I_2$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

(1) das Ideal $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle \subseteq k[x, y]$ ein Pseudoprimeal ist;

(2) $I = \langle x^2, y \rangle \cap \langle x, y^2 \rangle$ ist. Daraus leiten sie ab, dass I kein irreduzibles Ideal ist.

Definition 3. Sei $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. Eine *Pseudoprime-Zerlegung* von I ist eine Darstellung

$$I = \bigcap_{i=1}^r P_i,$$

wobei P_1, \dots, P_r Pseudoprimeale sind. Diese Zerlegung heißt *minimal*, wenn $\sqrt{P_{i_1}} \neq \sqrt{P_{i_2}}$ für $i_1 \neq i_2$ ist und $\bigcap_{j \neq i} P_j \not\subseteq P_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ ist.

Aufgabe 2. Sei $I = \langle x^2, xy \rangle \subseteq k[x, y]$. Beweisen Sie, dass

(1) $I = \langle x \rangle \cap \langle x^2, xy, y^2 \rangle = \langle x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle$ zwei verschiedene minimale Pseudoprime-Zerlegungen von I sind;

(2) $\sqrt{\langle x^2, xy, y^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2, y \rangle}$ ist;

(3) für alle $a \in k$ die Zerlegung $I = \langle x \rangle \cap \langle x^2, y - ax \rangle$ eine minimale Pseudoprime-Zerlegung ist. Daraus leiten Sie ab, dass I unendlich viele minimale Pseudoprime-Zerlegungen hat, wenn k unendlich ist.