Zariski Abschluss und Ideale der Form $I : J$

Aufgabe 1. Sei S die Grenze des ersten Quadranten in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Zariski Abschluss von S.

Aufgabe 2. Seien I, J zwei Ideale in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Beweisen Sie: wenn I ein radikales Ideal ist, dann ist $I : J$ ein radikales Ideal und ist $I : J = I : \sqrt{J}$.

Aufgabe 3. Sei $f = x^2z - 6y^4 + 2xy^3z$. Finden Sie Polynome f_1, f_2, f_3, so dass $f = (x+3)f_1 + (y-1)f_2 + (z-2)f_3$ gilt.

Aufgabe 4. Beweisen Sie folgenden Satz. Sei I ein Ideal und g ein Element von $k[x_1, \ldots, x_n]$. Ist $\langle h_1, \ldots, h_p \rangle$ eine Basis vom Ideal $I \cap \langle g \rangle$, dann ist $\{h_1/g, \ldots, h_p/g\}$ eine Basis von Ideal $I : \langle g \rangle$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\langle x_1^2+1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ ein maximales Ideal in $R[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

Aufgabe 6. Beweisen Sie: wenn $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein irreduzibles Polynom ist, dann ist die algebraische Menge $\mathbf{V}(f)$ irreduzibel.

Aufgabe 7. Sei $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $f = f_1^{k_1} f_2^{k_2} \ldots f_s^{k_s}$ die Faktorisierung von f in irreduziblen Polynomen. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(f_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(f_s)$ ist,

(b) jede Menge $\mathbf{V}(f_i)$ irreduzibel ist,

(c) $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f)) = \langle f_1 f_2 \ldots f_s \rangle$ ist.