Hilbertscher Nullstellensatz und Abschlüss-Satz

Aufgabe 1. Sei $I = \langle x^2 + y^2 - 1, y - 1 \rangle$. Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$, so dass $f \notin I$ ist. Zeigen Sie mit einer geraden Berechnung, dass $m \geqslant 1$ existiert, so dass $f^m \in I$ gilt.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie zwei Ideale I_1, I_2 in $\mathbb{R}[x]$, so dass I_1 nicht in I_2 liegt, I_2 nicht in I_1 liegt und $\mathbf{V}(I_1) = \mathbf{V}(I_2)$ gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass der Hilbertsche Nullstellensatz nicht für Ideale über $\mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + 1, y^2 + z^2 - 1 \rangle$ ein Ideal in $k[x, y, z]$. Berechnen Sie $\mathbf{V}(I)$ und $\mathbf{V}(I_1)$ für $k = \mathbb{C}$ und für $k = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Abschlüss-Satz nicht für Ideale über $\mathbb{R}$ gilt.