Resultanten

Aufgabe 1. Sei C eine Kurve mit Parameterdarstellung

$$u = \frac{t^2}{1+t^2},\ v = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Benutzen Sie den Resultant, um t zu eliminieren. Schreiben Sie die Gleichung der Kurve in den Unbekannten u, v.

Aufgabe 2. Sei $I = \langle f, g\rangle = \langle xy-1, yx^2+y^2-4\rangle \subseteq k[x,y] =$ ein Ideal. Sei $I_1 = I \cap k[y]$ erstes Eliminationsideal für I. Beweisen Sie, dass $\mathbf{Res}(f,g;x)$ nicht I_1 erzeugt.

Satz. Seien $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$.
1) Es existieren $A, B \in k[x_1, \ldots, x_n]$, so dass gilt $Af + Bg = \mathbf{Res}(f,g;x_1)$.

2) Es gilt $\mathbf{Res}(f,g;x_1) = 0$ nur dann, wenn f und g einen gemeinsamen Faktor haben und den Faktor hängt von x_1 ab.

Aufgabe 3. Sei $f, g \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$.
a) Beweisen Sie, dass $\mathbf{V}(f)$ unendlich ist.
b) Beweisen Sie, dass $\mathbf{V}(f,g)$ nur dann unendlich ist, wenn f und g einen gemeinsamen Faktor haben.

Aufgabe 4. Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$, so dass gilt

$$\mathbf{Res}(f,g;x)|_{y=0} \neq \mathbf{Res}(f|_{y=0}, g|_{y=0}; x).$$