

Gröbner Basis.

Eliminierung und Erweiterung. Resultant

Aufgabe 1. Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + y - 1, x + y^2 - 1 \rangle$ ein Ideal in $k[x, y]$.

a) Finden Sie eine irreduzible Gröbner Basis für I bezüglich der *lex*-Ordnung mit $x \succ y \succ z$.

b) Finden sie alle Eliminationsideale für I .

c) Finden Sie $\mathbf{V}(I)$ mit Hilfe der Erweiterungen.

Aufgabe 2. Sei $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ ein Ideal in $k[x, y, z]$, wobei

$$\begin{aligned} g_1 &= x + y + z^2 - 1, \\ g_2 &= y^2 - y - z^2 + z, \\ g_3 &= 2yz^2 + z^4 - z^2 \end{aligned}$$

ist. Es ist bekannt, dass eine Gröbner Basis für I besteht aus g_1, g_2, g_3 und noch einem Polynom g_4 , das nur von z abhängt.

a) Finden Sie g_4 .

b) Finden Sie $\mathbf{V}(I)$.

c) Ob $f = x^2 + y + z - 1$ in I liegt?

Aufgabe 3. Seien $f = xy - 1, g = x^2 + y^2 - 4$.

a) Finden Sie $\mathbf{Res}(f, g, x)$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Res}(f, g, x)$ in dem Ideal $\langle f, g \rangle \subseteq k[x, y]$ liegt.

3) Finden Sie Polynome $u(x)$ und $v(x)$, so dass gilt

$$uf + vg = \mathbf{Res}(f, g, x).$$

Aufgabe 4. Seien $f(x), g(x)$ zwei Polynome und seien $\text{Grad}(f) = m$ und $\text{Grad}(g) = n$. Beweisen Sie, dass gilt

$$\mathbf{Res}(f, g, x) = (-1)^{nm} \mathbf{Res}(g, f, x).$$

DEFINITION. Sei $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ein Polynom und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seine Nullstellen. *Diskriminant von $f(x)$* ist

$$\mathbf{Dis}(f(x)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Es ist bekannt, dass gilt

$$\mathbf{Dis}(f(x)) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_0} \mathbf{Res}(f, f', x).$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie

a) $\mathbf{Dis}(x^2 + bx + c)$,

b) $\mathbf{Dis}(x^3 + bx + c)$.