

Monomiale Ordnungen, Divisions Algorithmus und Gröbner Basis

Definition. Seien $m_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ und $m_2 = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ zwei Monome. Wir schreiben $m_1 \succ_{grlex} m_2$, wenn gilt

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

oder

$$|\alpha| = |\beta| \text{ und } m_1 \succ_{lex} m_2.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass \succ_{grlex} eine monomiale Ordnung ist.

Aufgabe 2. Finden Sie einen Rest von $f = x^4 y^2 + x^3 y^2 - y + 1$ modulo $F = (f_1, f_2) = (xy^2 - x, x - y^2)$ bezüglich der Ordnung \succ_{lex} und bezüglich der Ordnung \succ_{grlex} . In beiden Fällen finden Sie Polynome q_1 und q_2 , so dass

$$f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \text{Rest}_F(f)$$

ist.

Aufgabe 3. Sei $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset k[x, y, z]$, wobei $g_1 = xy^2 - xz + y$, $g_2 = xy - z^2$, $g_3 = x - yz^4$ ist. Benutzen Sie lexikographische Ordnung und finden Sie ein $g \in I$, so dass

$$\text{LM}(g) \notin \langle \text{LM}(g_1), \text{LM}(g_2), \text{LM}(g_3) \rangle$$

ist.

Aufgabe 4. Sei $I = \langle g_1, g_2 \rangle \subset k[x, y]$, wobei $g_1 = 2xy^2 - x$, $g_2 = 3x^2y - y - 1$ ist. Benutzen Sie die \succ_{grlex} -Ordnung und finden Sie ein $g \in I$, so dass

$$\text{LM}(g) \notin \langle \text{LM}(g_1), \text{LM}(g_2) \rangle$$

ist.

Aufgabe 5. Sei $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset k[x, y, z]$, wobei $g_1 = x^4 y^2 - z^5$, $g_2 = x^3 y^3 - 1$, $g_3 = x^2 y^4 - 2z$ ist. Ist $\{g_1, g_2, g_3\}$ eine Gröbner Basis von I bezüglich der \succ_{grlex} -Ordnung?

Aufgabe 6. Sei $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$ eine Kette algebraischer Mengen. Beweisen Sie, dass ein $m \geq 1$ existiert, so dass $V_m = V_{m+1} = \dots$ ist.