# Algebraische Unabhängigkeit

**Satz.** Sei $V \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann ist die Dimension von $V$ gleich maximales $r$, so dass Koordinaten-Funktionen $[x_{i_1}], \ldots [x_{i_r}]$ in dem Koordinaten-Ring $k[V]$ existieren, die algebraisch unabhängig sind.

**Aufgabe 1.** Sei $I = \langle zx - x^2, zy - xy \rangle \subseteq k[x, y, z]$ ein Ideal.

(a) Beweisen Sie, dass die Koordinaten-Funktionen $[x]$ und $[y]$ algebraisch unabhängig in dem Koordinaten-Ring $k[\mathbf{V}(I)]$ sind.

(b) Sei $k = \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Dimension von $\mathbf{V}(I)$ auf zwei unterschiedliche Weisen.

**Aufgabe 2.** Sei $G$ die Rotations-Gruppe eines Ikosaeders.

(a) Beweisen Sie, dass $|G| = 60$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass $G \cong A_5$ ist.

(c) Finden Sie zwei algebraisch unabhängige Invarianten in dem Invarianten-Ring $k[x, y, z]^G$.