

Hilbertsches Polynom. Dimension der affinen algebraischen Menge

DEFINITION 1. Sei $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. *Hilbertsche Funktion von I* ist die Funktion $HF_I : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, die so definiert ist:

$$\begin{aligned} HF_I(s) &= \dim(k[x_1, \dots, x_n]_{\leq s} / I_{\leq s}) \\ &= \dim k[x_1, \dots, x_n]_{\leq s} - \dim I_{\leq s} \end{aligned}$$

SATZ 1. Sei $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. Es existiert ein Polynom $P(s)$, so dass für alle groß genug s gilt $HF_I(s) = P(s)$. Dieses Polynom heißt *Hilbertsches Polynom von I* .

SATZ 2. Sei $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ein monomiales Ideal. Dann ist $HF_I(s)$ gleich der Anzahl von Monomen des Grades $\leq s$ außen I .

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Hilbertsche Funktion und das Hilbertsche Polynom des Ideals $\langle x^3y, xy^2 \rangle \subseteq k[x, y]$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Die Anzahl von Monomen in $k[x_1, \dots, x_n]$ des totalen Grades s gleich $\binom{s+n-1}{n-1}$ ist.

(b) Die Anzahl von Monomen in $k[x_1, \dots, x_n]$ des totalen Grades $\leq s$ gleich $\binom{s+n}{n}$ ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Hilbertsche Polynom des Ideals

$$\langle x^3yz^5, xy^3z^2 \rangle \subseteq k[x, y, z].$$

DEFINITION 2. Die *Dimension der algebraischen Menge $V \subseteq k^n$* ist der Grad des Hilbertschen Polynoms des Ideals $\mathbf{I}(V) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$.

Aufgabe 4. Sei $p = (a_1, \dots, a_n)$ ein Punkt in k^n . Berechnen Sie die Dimension der algebraischen Menge $V = \{p\}$.

Aufgabe 5. Sei $I = \langle x^2 + y^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$.

(a) Zeigen Sie, dass der Grad des Hilbertschen Polynoms von I gleich 1 ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Dimension von $\mathbf{V}(I)$ gleich 0 ist.