Endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(k)$ und ihre Invarianten

Aufgabe 1. Beweisen Sie:
1) alle Matrizen der Ordnung 2 in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind der Matrize $-E$ konjugiert;

2) alle Matrizen der Ordnung 2 in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sind einer der folgenden Matrizen konjugiert:

$$-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass diese Matrizen nicht zueinander konjugiert sind.

3) Finden Sie den Ring von Invarianten der Gruppen $\langle -E \rangle$, $\langle A \rangle$, $\langle B \rangle$.

Aufgabe 2. Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, so dass $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist.

1) Beweisen Sie, dass G der Untergruppe $\langle -E, A \rangle$ oder der Untergruppe $\langle -E, B \rangle$ konjugiert ist.

2) Finden Sie den Ring von Invarianten der Gruppe $\langle -E, A \rangle$.

Aufgabe 3. Finden Sie eine Matrize der Ordnung 3 in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Hinweis: Es existiert eine solche Matrize mit Elementen aus der Menge $\{-1, 0, 1\}$.