Isomorphism und birationale Äquivalenz der algebraischen Mengen

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass folgende algebraische Mengen isomorph sind:

1) $V = \mathbf{V}(y - x^n, z - x^m) \subseteq k^3$ und $W = k^1 \subseteq k^1$;

2) $V = \mathbf{V}(x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})) \subseteq k^n$ und $W = k^{n-1} \subseteq k^{n-1}$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie: Eine algebraische Menge V ist irreduzibel nur dann, wenn ihr Koordinatenring $k[V]$ keine Nullteiler hat.

Definition 1. Seien $V \subseteq k^m$ und $W \subseteq k^n$ zwei irreduzible algebraische Mengen. Eine rationale Abbildung von V nach W ist eine Abbildung der Form

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \Big(\frac{f_1(x_1, \dots, x_m)}{g_1(x_1, \dots, x_m)}, \dots, \frac{f_1(x_1, \dots, x_m)}{g_1(x_1, \dots, x_m)}\Big),$$

wobei $f_i/g_i \in k(x_1, \dots, x_m)$ ist und folgende Bedingungen gelten:

(1) ϕ ist mindestens in einem Punkt von V definiert;

(2) Wenn ϕ in einem Punkt $(a_1, \dots, a_m)$ von V definiert ist, dann liegt $\phi(a_1, \dots, a_m)$ in W

Definition 3. Zwei irreduzible algebraische Mengen $V \subseteq k^m$ und $W \subseteq k^n$ heißen *birational-äquivalent*, wenn rationale Abbildungen $\phi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ existieren, so dass

(1) es existiert eine echte algebraische Untermenge $W' \subseteq W$, so dass $\phi \circ \psi$ identisch auf $W \setminus W'$ ist;

(2) es existiert eine echte algebraische Untermenge $V' \subseteq V$, so dass $\psi \circ \phi$ identisch auf $V \setminus V'$ ist.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathbf{V}(y^2 - x^3) \subseteq k^2$. Beweisen Sie, dass

1) V irreduzibel ist;

2) $\mathbf{I}(V) = \langle y^2 - x^3 \rangle$ ist;

3) die algebraischen Mengen V und k nicht isomorph sind;

4) die algebraischen Mengen V und k birational äquivalent sind.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die algebraischen Mengen $V = \mathbf{V}(x^2+y^2+z^2-1) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ birational äquivalent sind.