

Algebraische Mengen und Ideale

Aufgabe 1. Sei $X = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 1\}$. Beweisen Sie, dass X keine algebraische Menge ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, daß die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ folgende rationale Parameterdarstellung hat:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \\y &= \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \\z &= \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $c > 0$. Beweisen Sie, dass die Kurve $y^2 = cx^2 - x^3$ folgende rationale Parameterdarstellung hat:

$$\begin{aligned}x &= c - t^2, \\y &= t(c - t^2).\end{aligned}$$

Definition. Sei $V \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann ist die Menge

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } (a_1, \dots, a_n) \in V\}$$

ein Ideal. Das Ideal $\mathbf{I}(V)$ heißt *Ideal von V* .

Aufgabe 4. Sei V eine algebraische Menge. Beweisen Sie:

- (a) Wenn $f^n \in \mathbf{I}(V)$ für einen $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist $f \in \mathbf{I}(V)$.
- (b) $\langle x^2, y^2 \rangle \neq \mathbf{I}(V)$ für jede algebraische Menge V .

Aufgabe 5. Beweisen Sie: $y^2 - xz \in \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$.

Aufgabe 6. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Kurve die folgende Parameterdarstellung hat:

$$\begin{aligned}x &= t^2, \\y &= t^3, \\z &= t^4.\end{aligned}$$

- (a) Beweisen Sie, dass V eine algebraische Menge ist.
- (b) Finden sie eine Basis von $\mathbf{I}(V)$.

Aufgabe 7. Sei k ein Körper, der nur 0 und 1 enthält. Beweisen Sie:

$$\mathbf{I}(k^2) = \langle x^2 - x, y^2 - y \rangle.$$