

Klausur

Aufgabe 1. Finden Sie die reduzierte Gröbner Basis des Ideals

$$\langle x^2y - 1, xy^2 - x \rangle \subseteq k[x, y]$$

bezüglich der *grlex*-Ordnung \succ mit $x \succ y$.

Aufgabe 2. Sei $I = \langle x^2 + xy + 1, y^2 - 3 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$

(a) Berechnen Sie eine Gröbner Basis dieses Ideals bezüglich der *lex*-Ordnung mit $x \succ y$.

(b) Schreiben Sie eine Basis B des Vektorraums $\mathbb{R}[x, y]/I$ auf.

(c) Für alle $b, b' \in B$ drücken Sie das Produkt bb' als eine Linearkombination von Elementen aus B aus.

(d) Berechnen Sie das Inverse zu $[x - 1]$ in dem Ring $\mathbb{R}[x, y]/I$.

Aufgabe 3. Sei $I = \langle xy, yz \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ ein Ideal.

(a) Berechnen Sie das Hilbertsche Polynom dieses Ideals.

(b) Berechnen Sie die Dimension der algebraischen Menge $\mathbf{V}(I)$.

Aufgabe 4. Formulieren Sie den Hilbertschen Nullstellensatz.

Aufgabe 5. Formulieren Sie den Eliminationssatz.