

Theoretische Fragen zum Kurs

Algorithmische Algebra

Sätze mit \star können mit Beweisen gefragt sein.

1. Definition einer algebraischen Menge, Definition einer rationalen Parameterdarstellung einer algebraischen Menge (Vorlesung 1).
2. Definition einer monomialen Ordnung. Definition des Rests des Polynomes modulo eines Tupels von Polynomen bezüglich einer monomialen Ordnung (Vorlesung 2).
3. Dicksons Lemma. Hilberts Basissatz \star . Folgerung über einer wachsende Kette von Idealen \star . Definition der Gröbner Basis. Existenz der Gröbner Basis \star . Eigenschaften der Gröbner Basis (Vorlesung 3).
4. Buchbergers Kriterium (Vorlesungen 3-4).
5. Buchbergers Algorithmus. Definition der minimalen Gröbner Basis. Satz über die Existenz der minimalen Gröbner Basis. Definition der irreduziblen Gröbner Basis. Satz über die Existenz und die Einzigkeit der irreduziblen Gröbner Basis (Vorlesungen 5-6.)
6. Definition des Resultants. Alle Lemmas, Sätze und Folgerungen über den Resultant aus der Vorlesung 7.
7. Definition des l -en Eliminationsideals. Eliminationssatz. Lemma über die Angehörigkeit des Resultants zum ersten Eliminationsideal. Erweiterungssatz für zwei Polynome \star . Erweiterungssatz im allgemeinen Fall (Vorlesungen 8-9).
8. Satz über das Ideal I mit $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ \star . Folgerung über die Existenz gemeinsamer Nullstellen der Polynome aus einem echten Ideal \star . Definition von Radikal des Ideals. Hilbertscher Nullstellensatz \star (Vorlesung 10).
9. Definition eines radikalen Ideals. Satz über die Abbildungen \mathbf{I} und \mathbf{V} zwischen algebraischen Mengen und radikalen Idealen. Definition des Zariski Abschlusses. Abschluss Satz (Vorlesung 11).
10. Algorithmen zur Berechnung von Summen, Produkten und Überschneidungen von Idealen (Vorlesung 12).
11. Definition einer irreduziblen algebraischen Menge. Definition eines Primideals. Satz über die Abbildungen \mathbf{I} und \mathbf{V} zwischen irreduziblen algebraischen Mengen und Primidealen. Ein Kriterium für die Irreduzibilität der algebraischen Menge. Definition eines maximalen Ideals. Satz über die Struktur eines maximalen Ideals \star . Satz über die Abbildungen \mathbf{I} und \mathbf{V} zwischen den Punkten in k^n und maximalen Idealen (Vorlesung 13).

12. Definition des Quotienten zweier Ideale. Algorithmische Berechnung des Quotienten (Vorlesung 14).
13. Satz über eine sinkende Kette algebraischer Mengen[★]. Satz über die minimale Zerlegung der algebraischen Mengen in irreduziblen Komponenten[★]. Satz über die Zerlegung eines radikalen Ideals in Primidealen (Vorlesung 15).
14. Definition des Pseudoprimeals. Satz von Lasker–Nöther über die minimale Pseudoprimeal-Zerlegung (Vorlesung 16).
15. Kriterien der Endlichkeit der Menge $\mathbf{V}(I)$ (Vorlesung 17).
16. Definition der polynomialen Abbildung von einer algebraischen Menge in eine andere. Definition des Koordinatenrings der algebraischen Menge. Algebraische Beschreibung des Koordinatenrings in der Form eines Faktor-Ideals. Definition des Isomorphismus zweier algebraischer Mengen. Kriterium für einen Isomorphismus zwischen algebraischen Mengen (Vorlesung 18).
17. Definition des Körpers rationaler Funktionen auf algebraischen Menge (Vorlesungen 19-20).
18. Definition einer rationalen Abbildung zwischen zwei algebraischen Mengen. Definition der bi-rationalen Äquivalenz von zwei algebraischen Mengen. Kriterium für die bi-rationale Äquivalenz von zwei algebraischen Mengen (Vorlesung 21).
19. Definition des Invariantenrings einer linearen Gruppe. Definition des Reynolds-Operators. Ein Satz von Emmy Nöther über Erzeugende des Invariantenrings. Algorithmische Auflösbarkeit des Mitgliedschaftsproblems in polynomialen Ringen (Vorlesung 22).
20. Definition der Hilbertschen Funktion und des Hilbertschen Polynoms eines Ideals. Definition der Dimension einer algebraischen Menge. Satz über $HF_I(s) = HF_{\langle LM(I) \rangle}(s)$. Dimension-Satz (Vorlesung 23-24).
21. Definition der algebraischen Unabhängigkeit von Elementen aus dem Koordinatenring $k[V]$. Satz über die Dimension von V und die algebraische Unabhängigkeit in dem Koordinatenring $k[V]$ (Vorlesung 25).

Bibliographie

1. O. Bogopolski, Skript in
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsvi/bogopolski/index.html>
2. D. Cox, J. Little, D. O'shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer, 1997.