

Quadratische Reste

Aufgabe 1. Finden Sie alle positiven quadratischen Reste modulo 163, die kleiner als 17 sind.

Aufgabe 2. Finden Sie die kleinste positive Zahl, die kein quadratischer Rest modulo 61 ist.

Aufgabe 3. Finden Sie alle Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv 52 \pmod{61}$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n eine Primzahl p existiert, so dass die Zahlen $1, 2, \dots, n$ quadratischen Reste modulo p sind.

Hinweis. Benutzen Sie die Eigenschaften des Legendre-Symbols und folgenden Satz.

Satz (Dirichlet). Für jede nichtnullische Zahl a in der Reihe $1 + ak$ ($k = 1, 2, \dots$) gibt es unendlich viele Primzahlen.