

Chinesischer Restklassensatz. Multiplikative Gruppe \mathbb{Z}_n^*

Aufgabe 1. Finden Sie alle ganzen Zahlen x , so dass gilt

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3}, \\ x \equiv 2 \pmod{5}, \\ x \equiv 3 \pmod{7}. \end{cases}$$

Aufgabe 2. 1) Finden Sie alle Erzeugenden der zyklischen Gruppe \mathbb{Z}_{10} .
2) Beweisen Sie: a ist ein Erzeugendes der zyklischen Gruppe \mathbb{Z}_n nur dann, wenn $\text{ggT}(a, n) = 1$ ist.

Aufgabe 3. 1) Schreiben Sie alle Elemente der Gruppe \mathbb{Z}_{25}^* auf.
2) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_{20}$ ist.
3) Finden Sie alle g , so dass $\mathbb{Z}_{25}^* = \langle g \rangle$ ist.

Aufgabe 4. Stellen Sie die Gruppen \mathbb{Z}_{15}^* und \mathbb{Z}_{100}^* dar als kartesische Produkte zyklischer Gruppen.

Aufgabe 5.

- Prüfen sie nach, dass die Zahl $p = 1093$ eine Primzahl ist.
- Prüfen sie nach, dass die Zahlen $a = 2$ und $p = 1093$ folgende Kongruenz erfüllen

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$