Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Thorsten Camps
Timo Rosnau

SoSe 2010

Lineare Algebra II (BSc)

Übungsblatt 14

Abgabe bis Freitag, 16.07.2010, 12 Uhr, in den Postfächern im Foyer des Mathematikgebäudes.

Aufgabe 46

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$, so dass die Matrix A aus Aufgabe 35 die Jordannormalform hat.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 47

Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen $b : V \times V \to \mathbb{R}$ in dem jeweiligen $\mathbb{R}$-Vektorraum V auf die vier Eigenschaften Bilinearform, Symmetrie, nicht–entartet und positiv-definit:

a) In $V = \mathbb{R}^3$ die Abbildung $b(x, y) := x^t Ay$ mit $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) In $V = \mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ die Abbildung $b(f, g) := \max\{|f(x)g(x)| \mid x \in [a, b]\}$.

c) In $V = \mathrm{Pol}_2([0, 1], \mathbb{R})$ (Polynomfunktionen von Grad ≤ 2) die Abbildung $b(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)t\,dt$.

d) In $V = \mathrm{Pol}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ die Abbildung $b(f, g) := \int_{-1}^1 f(t)g(t)t\,dt$.

Aufgabe 48

Sei $V := K^{n\times n}$. Zeigen Sie für $b : V \times V \to K$ mit $b(A, B) := \mathrm{Spur}(A^t B)$ für $A, B \in K^{n\times n}$:

a) b ist eine symmetrische Bilinearform auf $K^{n\times n}$, das sogenannte *Killingprodukt* zweier Matrizen A und B aus $K^{n\times n}$.

b) Bestimmen Sie für $V = K^{2\times 2}$ den Orthogonalraum von $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.
Ist dieser ein orthogonales Komplement?

c) Bestimmen Sie eine ON-Basis des $K^{2\times 2}$, falls dies möglich ist.

Aufgabe 49
Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bilden eine Basis von V^*.

(ii) $\operatorname{Kern} \varphi_1 \cap \operatorname{Kern} \varphi_2 \cap \cdots \cap \operatorname{Kern} \varphi_n = \{\mathbf{0}\}$

(iii) Die Abbildung $V \to K^n,\ v \mapsto (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_n(v))^t$ ist bijektiv.

Hinweis: Benutzen Sie den von den φ_i erzeugten Unterraum U von V^*.