Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

10. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 30. Juni bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Montag, 10. bzw. Dienstag, 11. Juli.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Polyeder $P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$ sei durch folgende Ungleichungen gegeben:

$$
\begin{aligned}
-4x_1 - 3x_2 &\leq 10 \\
x_1 &\leq 4 \\
3x_1 - 8x_2 &\leq 13 \\
x_1 + 6x_2 &\leq 8 \\
x_2 &\leq 2 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
-8x_1 - 6x_2 &\leq 24
\end{aligned}
$$

(a) Bestimmen Sie alle echten Seitenflächen von $P(A,b)$ und geben Sie jeweils eine gültige Ungleichung an, durch welche die Seitenfläche induziert wird.

(b) Überführen Sie $P(A,b)$ in ein Polyeder der Form $P(D,d) = \{x \in \mathbb{R}^p : Dx = d, \; x \geq 0\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Betrachten Sie die Menge $\tilde{P} := P \times [-1,1]^k$, also

$$\tilde{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid x \in P, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\tilde{P}$ ist wieder ein Polyeder. Wann ist $\tilde{P}$ ein Polytop?

(b) Jede lineare Ungleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$, die gültig für P ist, ist auch gültig für $\tilde{P}$.

(c) Jede lineare Ungleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$, die eine Seitenfläche F von P induziert, induziert auch eine Seitenfläche $\tilde{F}$ von $\tilde{P}$. Wann ist $\tilde{F}$ eine Facette?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die folgende Menge:

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass K ein abgeschlossener konvexer polyedrischer Kegel ist.

(b) Stellen Sie K als $\operatorname{conv}(X) + \operatorname{cone}(Y)$ dar (mit Beweis).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Zeichnen Sie $P + Q$ (s. Blatt 1, Aufgabe 4d) für folgende Polytope: $P := [2,3] \times [3,5]$, $Q := \operatorname{conv}(\{(0,0)^\top, (0,1)^\top, (1, \frac{1}{2}^\top)\})$.

(b) Beweisen Sie, dass $P = P_1 + P_2$ für zwei Polyeder $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ wieder ein Polyeder ist. Hinweis: Argumentieren Sie mithilfe der Fourier-Motzkin-Elimination.