Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

9. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 23. Juni bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Montag, 3. bzw. Dienstag, 4. Juli.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende LP.

$$\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + x_3 - 4x_4 & \\
\text{s.t.} & x_1 + 6x_2 - 3x_4 & \geq 2 \\
 & x_3 + x_4 & = 7 \\
 & -2x_2 + 3x_3 + 10x_4 & \leq 2 \\
 & x_1 & \leq 0 \\
 & x_3 & \geq 3 \\
 & x_4 & \leq 5
\end{array}$$

(a) Überführen Sie die Nebenbedingungen des LPs in die Form $\{y \in \mathbb{R}^n : Ay \leq b, y \geq 0\}$. Benutzen Sie dabei fünf Variablen.

(b) Formulieren Sie das LP (mit Nebenbedingungen aus a) als LP in Standardform.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind Polyeder? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \mathbf{1}^\top x = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\}$, mit $a_1, \dots, a_n, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}$ den Vektor im $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten alle gleich 1 sind.

(b) $M_2 := \{y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid -1 \leq y_1 \leq 1,\ -1 \leq y_2 \leq 1\}$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$

(c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ x^\top y \leq 1$ für alle y mit $||y||_2 = 1\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar und $b, c \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das LP

$$\begin{aligned} &\min\ c^\top x \\ &\ \text{s.t. } Ax \leq b. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für den Optimalwert p^* gilt:

$$p^* = \begin{cases} c^\top A^{-1} b & \text{falls } (A^{-1})^\top c \leq 0 \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Seien $c, l, u \in \mathbb{R}^n$ und $l \leq u$. Geben Sie eine explizite Lösung für das folgende LP an:

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ \text{s.t. } & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Polyeder $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$. In P soll eine Kugel B mit Mittelpunkt $\bar{x} \in P$ und möglichst großem Radius $r > 0$ eingeschrieben werden, d.h.

$$B := \{\bar{x} + u \mid ||u||_2 \leq r\} \subseteq P.$$

Formulieren Sie dieses Problem als ein lineares Optimierungsproblem.