Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

8. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 16. Juni bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Montag, 26. bzw. Dienstag, 27. Juni.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $f_1, ..., f_\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen, $\ell \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \max\{f_i(x) \mid i = 1, ..., \ell\}$ ist konvex.

(b) Falls $f(x_0) = f_i(x_0)$ gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\partial f_i(x_0) \subseteq \partial f(x_0)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Implementieren Sie in Matlab das Subgradientenverfahren (Algorithmus 11.6 aus der Vorlesung). Verwenden Sie die Schrittweiten $\sigma_k = \left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{2}{3}}$. Wenden Sie das Verfahren auf die folgenden Funktionen an:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 3|$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\|x\|^2, x_1 - 2x_2 + 2\}$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp((x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2)$.

Starten Sie dabei jeweils im Punkt $x^0 = 0$. Geben Sie für die ersten 10 Iterationen die Punkte x^k, die Zielfunktionswerte $f(x^k)$ und $\min\{f(x^0), ..., f(x^k)\}$ an.

Suchen Sie (in der Literatur oder entwickeln Sie eine weitere Schrittweitenformel, die den Anforderungen des Satzes 11.7 genügt aber von der Formel in Bemerkung 11.8 abweicht) und überprüfen Sie diese anhand Ihrer Implementierung. Geben Sie die beste gefundene Lösung an.

Stellen Sie außerdem Ihren Quellcode in gedruckter oder schriftlicher Form zur Verfügung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top x - x^\top b,$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie ein globales Minimum von f. Ist das globale Minimum eindeutig?

(b) Beweisen Sie, dass das Subgradientenverfahren (Algorithmus 11.6) für einen beliebigen Startpunkt x^0 bei der folgender Schrittweitenwahl

$$\sigma_k := \arg\min_{\sigma \geq 0} f(x^k - \frac{\sigma}{\|s^k\|} s^k)$$

nach höchstens einem Schritt terminiert.