Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

5. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 25. Mai bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Dienstag, 6. Juni.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Beweisen Sie: Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar wenn für alle $u \in \mathbb{R}^m$ mit $A^\top u = 0$ die Ungleichung $b^\top u \leq 0$ folgt.

Hinweis: Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kann geschrieben werden als $x = x^+ - x^-$ mit $x^+, x^- \geq 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Entscheiden Sie ob die Funktion $f(x, y) = -4xy + 2x^2 + 2y^2$ konvex ist.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : C \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:

(b) Jedes lokale Minimum von f auf C ist auch globales Minimum.

(c) Ist f streng konvex, so hat f auf C höchstens ein lokales Minimum und dieses ist global.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten eine Optimierungsaufgabe mit nichtlinearer, differenzierbarer Zielfunktion und einer linearen Gleichungsnebenbedingung ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) :

$$(PLG) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.t.} & Ax = b. \end{cases}$$

Beweisen Sie: Ist $\hat{x}$ ein Minimierer von (PLG), dann existiert $\mu \in \mathbb{R}^m$ mit $\nabla f(\hat{x}) + A^\top \mu = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ & -8x_1 - 6x_2 \\ \text{s.t. } & ||x||_2 \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Überprüfen Sie ob das vorliegende Problem alle Voraussetzungen erfüllt, dass die KKT-Bedingungen notwendig und hinreichend für die Optimalität sind. Ermitteln Sie die optimale Lösung mithilfe der KKT-Bedingungen.