Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

4. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 19. Mai bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Montag 29. Mai bzw. Dienstag, 30. Mai.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ wird definiert $M_C(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x + \lambda y \in C\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge $M_C(x_0)$ für $C = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ und $x_0 = (3,4)^\top$,

(b) Beweisen Sie: ist C eine abgeschlossene, konvexe Menge und $x \in C$, dann ist $M_C(x)$ ein konvexer abgeschlossener Kegel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\overline{\mathrm{conv}(X)} = \bigcap \{H \subseteq \mathbb{R}^n \mid H = H(a,\alpha)_{\leq} \text{ Halbraum mit } X \subseteq H\}.$$

Welche Menge entsteht wenn der Schnitt über Halbräume der Form $H(a,0)_{\leq}$ gebildet wird? (ohne Beweis)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 6.2 (Projektionssatz) aus der Vorlesung.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\Pi_C(y)$ die eindeutige Lösung des folgenden Optimierungsproblems.

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) := \frac{1}{2}||x-y||^2 \\ \text{s.t.} & x \in C \end{array} \tag{6.1}$$

Zeigen Sie also, dass $\Pi_C(y)$ genau dann optimal für (6.1) ist, wenn für alle $x \in C$ die Ungleichung

$$(\Pi_C(y) - y)^\top (x - \Pi_C(y)) \geq 0 \tag{6.3}$$

gilt.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Gradienten $\nabla f(x)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \geq 0 : Ax = 0$;

(ii) $\nexists y \in \mathbb{R}^m : A^\top y < 0$.