Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

3. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 12. Mai bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Montag 22. Mai bzw. Dienstag, 23. Mai.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Die Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Wert $z \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\mathcal{N}_f(z) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(z)\}.$$

Beweisen Sie: f ist konvex $\Rightarrow N_f(z)$ ist konvex für jedes $z \in \mathbb{R}^n$. Gilt die Umkehrung?

(b) Beweisen Sie: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann ist $\operatorname{argmin}(f, C) := \{x \in C : f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in C\}$ konvex.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Mengen besitzt die Kegeleigenschaft? Welche dieser Mengen ist konvex? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(a) $S^n_+ := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X = X^\top,\ v^\top X v \geq 0\ \forall v \in \mathbb{R}^n\}$;

(b) $T := \{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^n x_i = 0\}$;

(c) $U := \{a \in \mathbb{R}^n : p_a(x) := \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} \geq 0,\ x \in [0,1]\}$;

(d) $V := K_1 \cup K_2$, wobei K_1 und K_2 konvexe Kegel sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zum Transport von n Kugeln mit Radius r soll eine quaderförmige Kiste konstruiert werden, sodass die Oberfläche der Kiste möglichst klein ist. Modellieren Sie dieses Problem als ein nichtlineares Optimierungsproblem. Ist die Menge der zulässigen Punkte konvex?

Hinweis: Die optimale Breite, Höhe und Tiefe der Kiste lässt sich mithilfe der optimalen Mittelpunkte $p_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in \mathbb{R}^3$ jeder Kugel i im Raum bestimmen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \|x - y\|$ konvex, aber nicht strikt konvex auf $\mathbb{R}^n$ ist und dass die Niveaumengen von f kompakt sind.