Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Viktor Bindewald

Sommersemester 2017

1. Übungsblatt

zur Vorlesung

Optimierung

Abgabe:	Freitag, 28. April bis 14 Uhr in den jeweiligen Briefkasten.
Besprechung:	Montag 8. Mai bzw. Dienstag, 9. Mai.
Bitte beachten:	Keine gruppenübergreifenden Abgaben und nur Dreierabgaben. Bitte Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Jedes Gruppenmitglied muss die Lösung vorrechnen und erklären können.
Homepage:	`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsv/teaching/opt17/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Optimierungsprobleme zeichnerisch.

(a)
$$\begin{array}{rrrl} \max & 2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.t.} & -x_1 & +5x_2 & \leq 20 \\ & x_1 & +\;\; x_2 & \leq 10 \\ & 2x_1 & -\;\; x_2 & \leq 14 \\ & x_1 & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrl} \min & -x_1 & -\;\; x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & +\;\; x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & -6x_2 & \leq 2 \\ & -3x_1 & +\;\; x_2 & \leq 2 \\ & & x_2 & \leq 5 \\ & 4x_1 & +3x_2 & \leq 35 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rrrl} \min & -3x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.t.} & 3x_1 & +\;\; 2x_2 & \geq 10 \\ & x_1 & +2x_2 & \geq 6 \\ & x_1 & +\;\; 3x_2 & \geq 7 \\ & x_1 & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rrrrl} \max & & x_1 & +\;\; 2x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1^2 & -6x_1 & -\;\; x_2 & \geq -11 \\ & & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\ & & -x_1 & -x_2 & \leq -2 \\ & & -x_1 & +\;\; x_2 & \leq 5 \\ & & x_1 & & \geq 0 \\ & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In einem festen Planungszeitraum sind n Produkte $P_1, ..., P_n$ zu produzieren, wobei p_j Mengeneinheiten von Produkt P_j benötigt werden. Es stehen m Maschinen M_i zur Verfügung, die jeweils höchstens b_i Zeiteinheiten verwendet werden können. Jede Einheit des Produktes P_j kann wahlweise auf einer beliebigen Maschine M_i fertiggestellt werden; das beansprucht a_{ij} Zeiteinheiten und kostet c_{ij} Geldeinheiten pro Einheit. Gesucht ist die kostengünstigste Aufteilung der Produktion auf die verfügbaren Maschinen.

Formulieren Sie das Optimierungsproblem als ein ganzzahliges lineares Programm.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Mengen konvex sind:

(a) Jeder Halbraum der Form

$$H(a,\alpha)_{\leq} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq \alpha \right\}$$

mit $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(c) Jede abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(a)}$ (mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass folgende Operationen Konvexität erhalten:

(a) Sei $\{C_j\}_{j \in J}$ eine Familie konvexer Mengen. Dann ist der Durchschnitt $\cap_{j \in J} C_j$ ebenfalls konvex.

(b) Sind $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$, konvex, dann auch das kartesische Produkt $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_m$.

(c) Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann auch $\alpha C := \{\alpha x \mid x \in C\}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Sind C_1 und C_2 konvex, dann auch $C_1 + C_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$.